集合論ノート 0019　分出公理図式における変数の条件について

近藤友祐 (@elecello_)

初稿： 2020 年 6 月 6 日　　更新： 2020 年 6 月 14 日
この文書の場所： https://elecello.com/works.html

形式的体系について考えるとき，自由変数の扱い方が面倒になることがある．自由変数について精密に議論するのは骨が折れるし億劫な作業だけれども，そういうことが大事になる場面も多い．本稿では，集合論の分出公理を例に挙げてそんなような話をする．

さて，分出公理図式は次のような形で導入されることが多いだろう：

> φ を，集合論の言語 $\{\in\}$ の論理式であって，z **を自由変数として持たないようなものとする**．このとき，次の論理式（の全称閉包）は分出公理図式のインスタンスである：
>
> $$\forall y \exists z \forall x \, (x \in z \leftrightarrow x \in y \land \varphi(x)). \tag{1}$$

ここで，太字で書いた制約を外してしまうと矛盾が導かれてしまう．具体的には，例えば，φ として "$x \notin z$" をとると，ラッセルのパラドクスのようにして矛盾が導かれる．こんなデリケートなミスで集合論に矛盾が起きてしまうのだから，自由変数をいい加減に扱うというのは矛盾スレスレの危険行為なのだ．

定理 1. 集合論の言語の文 ρ, σ を以下に定める[a]：

$$\rho :\equiv \exists \mathrm{v}_1 \exists \mathrm{v}_0 (\mathrm{v}_0 \in \mathrm{v}_1), \qquad \sigma :\equiv \forall \mathrm{v}_1 \exists \mathrm{v}_2 \forall \mathrm{v}_0 (\mathrm{v}_0 \in \mathrm{v}_2 \ \leftrightarrow \ \mathrm{v}_0 \in \mathrm{v}_1 \land \mathrm{v}_0 \notin \mathrm{v}_2). \tag{2}$$

このとき，理論 $T := \{\rho, \sigma\}$ は矛盾する．

[a] 立体の $\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots$ は，述語論理の定義の時点で導入された互いに異なる変数記号であり，変数記号を表すメタ変数ではない．別に変数記号を表すメタ変数を使っても誤解は生じないとは思うが，「変数記号を正確に扱いたい」という本稿の性格上このような記述にした．

証明.（次頁に掲載する形式的証明の参考に供するべく，やや冗長に書く．）文 ρ で存在が保証される集合 v_1, v_0 を，それぞれ b, a と名付ける．この定義により，集合 a, b は条件 $a \in b$ を満たす．次に，文 σ で特に $\mathrm{v}_1 = b$ として

$$\exists \mathrm{v}_2 \forall \mathrm{v}_0 (\mathrm{v}_0 \in \mathrm{v}_2 \ \leftrightarrow \ \mathrm{v}_0 \in b \land \mathrm{v}_0 \notin \mathrm{v}_2) \tag{3}$$

を得る．ここで存在が示された集合 v_2 に c と名付ける．つまり集合 c は条件

$$\forall \mathrm{v}_0 (\mathrm{v}_0 \in c \ \leftrightarrow \ \mathrm{v}_0 \in b \land \mathrm{v}_0 \notin c) \tag{4}$$

を満たす．式 (4) で特に $\mathrm{v}_0 = a$ とすることで

$$a \in c \leftrightarrow a \in b \land a \notin c \tag{5}$$

を得る．いま，条件 $a \in b$ が成り立っているので

$$a \in b \land a \notin c \leftrightarrow a \notin c \tag{6}$$

が成り立つ．式 (5) と式 (6) を合わせて

$$a \in c \leftrightarrow a \notin c \tag{7}$$

を得る．これは矛盾である．理論 T に属する文 ρ と σ から矛盾が導けたので，理論 T は矛盾する．　□

せっかくなので，ρ と σ から $\bot$ に至る証明を自然演繹で書き下してみる（ただし全体は紙面に収まらないので分割してある．人間でも読める規模ですね）．以下に現れる $\mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4, \mathrm{v}_5$ は，この順に，先の非形式的な証明における a, b, c を意図している．

$\mathcal{P}_0$：

$$\dfrac{\rho \ :\equiv \exists \mathrm{v}_1 \exists \mathrm{v}_0(\mathrm{v}_0 \in \mathrm{v}_1) \qquad \dfrac{[\exists \mathrm{v}_0(\mathrm{v}_0 \in \mathrm{v}_4)]^1 \qquad [\mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_4]^0}{\mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_4}\,\exists\mathrm{e}^0}{\mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_4}\,\exists\mathrm{e}^1$$

$\mathcal{P}_1$：

$$\dfrac{\dfrac{\sigma :\equiv \forall \mathrm{v}_1 \exists \mathrm{v}_2 \forall \mathrm{v}_0(\mathrm{v}_0 \in \mathrm{v}_2 \leftrightarrow \mathrm{v}_0 \in \mathrm{v}_1 \land \mathrm{v}_0 \notin \mathrm{v}_2)}{\exists \mathrm{v}_2 \forall \mathrm{v}_0(\mathrm{v}_0 \in \mathrm{v}_2 \leftrightarrow \mathrm{v}_0 \in \mathrm{v}_4 \land \mathrm{v}_0 \notin \mathrm{v}_2)}\,\forall\mathrm{e} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_5]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall \mathrm{v}_0(\mathrm{v}_0 \in \mathrm{v}_5 \leftrightarrow \mathrm{v}_0 \in \mathrm{v}_4 \land \mathrm{v}_0 \notin \mathrm{v}_5)]^3}{\mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_5 \leftrightarrow \mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_4 \land \mathrm{v}_3 \notin \mathrm{v}_5}\,\forall\mathrm{e}}{\mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_5 \to \mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_4 \land \mathrm{v}_3 \notin \mathrm{v}_5}\,\land\mathrm{e}}{\mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_4 \land \mathrm{v}_3 \notin \mathrm{v}_5}\,\to\mathrm{e}}{\mathrm{v}_3 \notin \mathrm{v}_5}\,\land\mathrm{e}}{\mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_5 \to \mathrm{v}_3 \notin \mathrm{v}_5}\,\to\mathrm{i}^2}{\mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_5 \to \mathrm{v}_3 \notin \mathrm{v}_5}\,\exists\mathrm{e}^3$$

$\mathcal{P}_2$：

$$\dfrac{\dfrac{\sigma :\equiv \forall \mathrm{v}_1 \exists \mathrm{v}_2 \forall \mathrm{v}_0(\mathrm{v}_0 \in \mathrm{v}_2 \leftrightarrow \mathrm{v}_0 \in \mathrm{v}_1 \land \mathrm{v}_0 \notin \mathrm{v}_2)}{\exists \mathrm{v}_2 \forall \mathrm{v}_0(\mathrm{v}_0 \in \mathrm{v}_2 \leftrightarrow \mathrm{v}_0 \in \mathrm{v}_4 \land \mathrm{v}_0 \notin \mathrm{v}_2)}\,\forall\mathrm{e} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}_0\\ \mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_4\end{array} \qquad [\mathrm{v}_3 \notin \mathrm{v}_5]^4}{\mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_4 \land \mathrm{v}_3 \notin \mathrm{v}_5}\,\land\mathrm{i} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall \mathrm{v}_0(\mathrm{v}_0 \in \mathrm{v}_5 \leftrightarrow \mathrm{v}_0 \in \mathrm{v}_4 \land \mathrm{v}_0 \notin \mathrm{v}_5)]^5}{\mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_5 \leftrightarrow \mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_4 \land \mathrm{v}_3 \notin \mathrm{v}_5}\,\forall\mathrm{e}}{\mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_4 \land \mathrm{v}_3 \notin \mathrm{v}_5 \to \mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_5}\,\land\mathrm{e}}{\mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_5}\,\to\mathrm{e}}{\mathrm{v}_3 \notin \mathrm{v}_5 \to \mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_5}\,\to\mathrm{i}^4}{\mathrm{v}_3 \notin \mathrm{v}_5 \to \mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_5}\,\exists\mathrm{e}^5$$

$\mathcal{P}_3$：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]^6 \qquad \dfrac{[p]^6 \qquad \begin{array}{c}\mathcal{P}_1\\ p \to \neg p\end{array}}{\neg p}\,\to\mathrm{e}}{\bot}\,\neg\mathrm{e}}{\neg p}\,\neg\mathrm{i}^6 \qquad \begin{array}{c}\mathcal{P}_2\\ \neg p \to p\end{array}}{p}\,\neg\mathrm{e} \qquad \dfrac{\dfrac{[p]^7 \qquad \dfrac{[p]^7 \qquad \begin{array}{c}\mathcal{P}_1\\ p \to \neg p\end{array}}{\neg p}\,\to\mathrm{e}}{\bot}\,\neg\mathrm{e}}{\neg p}\,\neg\mathrm{i}^7}{\bot}\,\neg\mathrm{e}$$

ただし “p” は “$\mathrm{v}_3 \in \mathrm{v}_5$” の略記．

なお，以上の形式的証明は直観主義での証明にもなっていると思う．

今回は “怪しい分出公理 σ” 単独ではなく，そこに “一方が一方に属するような 2 つ (実は 1 つかもしれないが) の集合が存在する” という多少場当たり的[*1]な文 ρ を加えて矛盾を出した．σ 単独で矛盾を出せるかどうかは知らない．

参考文献

[1] Kunen, K., *The Foundations of Mathematics*, Vol. 19. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2009. 邦訳 [2].

[2] K. キューネン（藤田博司訳）, キューネン数学基礎論講義, 日本評論社, 2016. [1] の邦訳.

[3] 鹿島亮, 数理論理学（現代基礎数学 15）, 朝倉書店.

[4] IPC bot のツイート, `https://twitter.com/ipc_bot/status/1268968560535105539`, 2020 年 6 月 10 日閲覧.

[*1] 当然，文 ρ は空集合公理と対の公理から導けるため，定理 1 の系として，例えば，“{ 空集合公理，対の公理,σ} は矛盾する” もいえる．