集合論ノート 0018　正則開集合 (regular open sets) と完備ブール代数 (complete Boolean algebra) その 1

近藤友祐 (@elecello_)

初稿: 2019/08/25　更新: 2019/08/27
この文書の場所： https://elecello.com/works.html

本稿では，**「位相空間の正則開集合全体は完備ブール代数をなす」**という定理 (定理 5) を示す．「その 2」では，逆に「任意の完備ブール代数は，ある位相空間の正則開集合がなす完備ブール代数と同型である」ことの証明を書くつもり．

定義 1 (ブール代数の等式理論による定義)**. ブール代数** *(Boolean algebra)* とは可補分配束のことである．すなわち，構造 $\mathfrak{B} = \langle B; \vee, \wedge, *, 0, 1\rangle$ がブール代数であるとは，$\mathfrak{B}$ が以下の公理を満たすことをいう：

束の公理

単位律　$x \vee 0 = x, \quad x \wedge 1 = x.$

冪等律　$x \vee x = x, \quad x \wedge x = x.$

交換律　$x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x.$

結合律　$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$

吸収律　$(x \vee y) \wedge y = y, \quad (x \wedge y) \vee y = y.$

分配律[a]と補元律

分配律　$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$

補元律　$x \vee x^* = 1, \quad x \wedge x^* = 0.$

[a] 実は，束の公理を満たす限り分配律は片方からもう片方が導けるので，公理はどちらか片方で十分である．

ブール代数の定義は色々ある (例えば「擬補元を二回とると元に戻るようなハイティング代数」) が，ここでは上の定義を採用する．

ブール代数 $\mathfrak{B}$ の上に二項関係 $\leqslant$ を

$$x \leqslant y :\Longleftrightarrow x \wedge y = x \tag{1}$$

で入れると．$\leqslant$ は B 上の半順序になる．これを **$\mathfrak{B}$ が誘導する順序**と呼ぶことにする．$x \vee y$, $x \wedge y$, 0, 1 は，この順序に関する $\{x, y\}$ の最小上界，$\{x, y\}$ の最大下界，B の最小元，B の最大元，にそれぞれ一致することが確かめられる．

定義 2 (完備性). ブール代数 $\mathfrak{B} = \langle B; \vee, \wedge, *, 0, 1\rangle$ が**完備** *(complete)* であるとは，$\mathfrak{B}$ が誘導する順序に関して，B の任意の部分集合が最小上界および最大下界をもつことである[a]．$S \subseteq B$ の最小上界，最大下界をそれぞれ $\bigvee S$, $\bigwedge S$ と書く．完備ブール代数のことを **cBa** と書くこともある (complete Boolean algebra の略).

[a] 実は「最小上界をもつ」の条件があれば「最大下界を持つ」は自動的に出てくる．実際，$S \subseteq B$ の最大下界は S の下界全体がなす集合の最小上界として得られる．逆も然り．

以下，位相空間 X の任意の部分集合 $A \subseteq X$ に対し，A の開核を A°，閉包を A^-，補集合を A^c，外部を A^e で表すことにする．正確を期せば，$A^c := X \setminus A$ および $A^e := A^{c\circ}\,(= A^{-c})$ である．

定義 3 (正則開集合). X を位相空間とする．X の部分集合 $A \subseteq X$ が**正則開** *(regular open)* であるとは，

$$A^{-\circ} = A \tag{2}$$

を満たすことをいう (左辺が開集合なので A は自動的に開)．X の正則開集合全体を $\mathrm{RO}(X)$ と書く．

特に，開かつ閉 (clopen) な集合は正則開である：$(A^-)^\circ = A^\circ = A$.

補題 4. 位相空間 X の任意の部分集合 $P, Q \subseteq X$ に関して，次が成り立つ．

(1) P が開なら $P \subseteq P^{-\circ}$.
(2) $P^{-\circ-\circ} = P^{-\circ}$．つまり $P^{-\circ}$ は常に正則開．
(3) $P \subseteq Q$ なら $P^e \supseteq Q^e$.
(4) $P^e \cap Q^e = (P \cup Q)^e$.
(5) $P^e \cup Q^e \subseteq (P \cap Q)^e$.
(6) P が**開**なら $P \subseteq P^{ee}$.
(7) P が**開**なら $P^{eee} = P^e$.
(8) P が**正則開**なら $P^{ee} = P$.
(9) P, Q が**開**なら $(P \cap Q)^{ee} = P^{ee} \cap Q^{ee}$.

Proof. (1): 自明に成り立つ包含関係 $P \subseteq P^-$ の両辺の開核をとり $P^\circ \subseteq P^{-\circ}$ となる．P は開ゆえ $P^\circ = P$ だから結局 $P \subseteq P^{-\circ}$.
(2): $P^{-\circ}$ は開なので (1) より $P^{-\circ} \subseteq P^{-\circ-\circ}$ はよい．逆に，自明に成り立つ包含関係 $P^{-\circ} \subseteq P^-$ の両辺の閉包をとり $P^{-\circ-} \subseteq P^{--} = P^-$ である．この両辺の開核をとって $P^{-\circ-\circ} \subseteq P^{-\circ}$ を得る．
(3): $P \subseteq Q$ の両辺の補集合をとり $P^c \supseteq Q^c$．開核をとり $P^{c\circ} \supseteq Q^{c\circ}$．つまり $P^e \supseteq Q^e$.
(4): $(P \cup Q)^e = (P \cup Q)^{c\circ} = (P^c \cap Q^c)^\circ = P^{c\circ} \cap Q^{c\circ} = P^e \cap Q^e$.
(5): 自明に成り立つ包含関係 $P \supseteq P \cap Q$ の両辺の補集合をとったのち開核をとり $P^e \subseteq (P \cap Q)^e$ を得る．同様に $Q^e \subseteq (P \cap Q)^e$ なので，$P^e \cap Q^e \subseteq (P \cap Q)^e$ である．
(6): 自明に成り立つ包含関係 $P \subseteq P^-$ の両辺の補集合をとり $P^c \supseteq P^{-c} = P^e$ を得る．両辺の閉包をとって $P^{c-} \supseteq P^{e-}$．更に両辺の補集合をとって $P^{c-c} \subseteq P^{e-c} = P^{ee}$ を得る．ところで P が開であることから左辺は $P^{c-c} = P^\circ = P$ と変形され，$P \subseteq P^{ee}$ が示せた．

(7): (6) を開集合 P^e に適用して $P^e \subseteq P^{eee}$ はよい．また，(6) と (3) から直ちに $P^e \supseteq P^{eee}$ を得る．
(8): $P^{ee} = P^{-c-c} = P^{-\circ} = P$.
(9): 自明に成り立つ包含関係 $P \cap Q \subseteq P$ に対して (3) を二回適用し，$(P\cap Q)^{ee} \subseteq P^{ee}$ を得る．同様に $(P\cap Q)^{ee} \subseteq Q^{ee}$ であるから結局 $(P\cap Q)^{ee} \subseteq P^{ee} \cap Q^{ee}$ である．逆向きの包含関係を示す．

Claim 1.[*1] 任意の**開**集合 $A \subseteq X$ と任意の部分集合 $B \subseteq X$ に対し，$A \cap B^- \subseteq (A\cap B)^-$.
$\vdash$ $x \in A \cap B^-$ とする．$x \in B^-$ より，閉包の定義ないし性質から，x を含む任意の開集合 G に対して $G \cap B \neq \varnothing$ が成り立つ $\cdots(*)$．$x \in (A\cap B)^-$ を示すために，x を含む開集合 U を任意にとる (want: $U \cap A \cap B \neq \varnothing$)．仮定より A は開であるから，$U \cap A$ は x を含む開集合になっている．よって，$(*)$ で $G = U \cap A$ とすることで $U \cap A \cap B \neq \varnothing$ である． $\dashv$

Claim 2. 任意の**開**集合 $S \subseteq X$ と任意の部分集合 $T \subseteq X$ に対し，$S \cap T^{ee} \subseteq (S\cap T)^{ee}$.
$\vdash$ $S^c \cup T^e = S^c \cup T^{-c} = (S \cap T^-)^c \supseteq (S\cap T)^{-c} = (S\cap T)^e$ が成り立つ ($\supseteq$ は Claim で $A = S$, $B = T$ としたもの)．最端辺の閉包をとったのち補集合をとり $(S^c \cup T^e)^{-c} \subseteq (S\cap T)^{e-c} \cdots (**)$ を得る．すると $(S \cup T)^{ee} = (S\cap T)^{e-c} \supseteq_{(**)} (S^c \cup T^e)^{-c} = (S^{c-} \cup T^{e-})^c = S^{c-c} \cap T^{e-c} = S^\circ \cap T^{ee} = S \cap T^{ee}$. $\dashv$

Claim 2 を $S = P^{ee}$, $T = Q$ として適用して $P^{ee} \cap Q^{ee} \subseteq (P^{ee} \cap Q)^{ee} \cdots (\dagger)$ を得る．また，Claim 2 を $S = Q$, $T = P$ として適用して $P^{ee} \cap Q \subseteq (P\cap Q)^{ee}$ を得，補題の (3) を二回適用し $(P^{ee}\cap Q)^{ee} \subseteq (P\cap Q)^{eeee} = (P \cap Q)^{ee}$ を得る．最後の等号は $(P\cap Q)^e$ が開であることと補題の (7) による．$(\dagger)(\ddagger)$ より所望の $P^{ee} \cap Q^{ee} \subseteq (P\cap Q)^{ee}$ が導けた． $\square$

コメント． 正則開集合とは，ユークリッド平面では「割れ目」「針穴」がないような開集合と考えられる．例えば，$P_1 = \mathbb{R}^2 \setminus (x \text{ 軸})$ や $P_2 = \mathbb{R}^2 \setminus (\text{原点})$ は，開だが正則開ではない ($P_i \subsetneq P_i^{-\circ} = \mathbb{R}^2$)．補題 4 の (1) や (2) は，演算 $(\cdot)^{-\circ}$ は開集合の「割れ目」「針穴」を一度で全部埋めて正則開集合に改造する演算と捉えられることを示している．したがって演算 $(\cdot)^{-\circ}$ は「正則化」とでも呼べよう．

補題 4 の (3) 以降は演算 $(\cdot)^e$ の性質を述べている．$\subseteq, \cup, \cap$ を「ならば，または，かつ」と読めば，$(\cdot)^e$ は「否定」に対応すると考えられよう (ただし，後述するように古典論理とのアナロジーとしての文脈では $\cup$ を「または」と呼ぶことはできない)．(3) は弱い対偶則[*2]，(4) はド・モルガン則の一つ，(6) は二重否定導入，(7) は弱い二重否定除去，(8) は二重否定除去と読むことができる．これらは「開集合系＝直観主義論理」「正則開集合系＝古典論理」というアナロジーを暗示する．

さて，(5) の逆向きの包含関係は，たとえ P, Q が正則開であっても一般には成立しない (反例：$P = (\text{単位円の内部})$, $Q = (\text{単位円の外部})$ とすれば，$(P\cap Q)^e = \varnothing^e = \mathbb{R}^2$ だが，$P^e \cup Q^e = Q \cup P = \mathbb{R}^2 \setminus (\text{単位円周})$)．よって，古典論理の文脈では「または」の定義は工夫する必要がありそうである．それは，次に示すように，単に和集合をとるのではなくその後に正則化することで解決される．

[*1] 点を取って議論するのはここだけ．なんか嫌な感じ．
[*2] 直観主義論理においては，“$(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$” は成り立たないが，“$(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$” は成り立つ．ここでは後者を「弱い対偶則」と呼んだ．

定理 5. X を位相空間とし，$A, B \in \mathrm{RO}(X)$ に対して，演算 $\vee, \wedge, *$ を次のように定義する：

$$A \vee B := (A \cup B)^{-\circ} \ (= (A \cup B)^{ee}), \tag{3}$$
$$A \wedge B := A \cap B, \tag{4}$$
$$A^* := A^{c\circ} \ (= A^{-c} = A^e). \tag{5}$$

このとき，$\vee, \wedge, *$ は $\mathrm{RO}(X)$ 上閉じており，$\mathfrak{RO}(X) = \langle \mathrm{RO}(X); \vee, \wedge, *, \varnothing, X \rangle$ は**ブール代数をなす**．また，$\mathfrak{RO}(X)$ が誘導する順序は包含関係 $\subseteq$ であり，この順序に関して $\mathfrak{RO}(X)$ は**完備である**．さらに，$\mathcal{F} \subseteq \mathrm{RO}(X)$ の最小上界 $\bigvee \mathcal{F}$ と最大下界 $\bigwedge \mathcal{F}$ は具体的に次式で与えられる：

$$\bigvee \mathcal{F} = \left(\bigcup \mathcal{F} \right)^{-\circ}, \qquad \bigwedge \mathcal{F} = \left(\bigcap \mathcal{F} \right)^{-\circ}. \tag{6}$$

以下で，まずブール代数であることを示し，次に完備性を示す．

補題 6. 定理 5 の記号法のもと，$\mathfrak{RO}(X)$ はブール代数をなす．

Proof. まず，$\varnothing$ と X は clopen なので $\varnothing, X \in \mathrm{RO}(X)$ はよい．演算の閉性および各公理を確かめる．$A, B, C \in \mathrm{RO}(X)$ とする．

$\vee$ の閉性　$(A \cup B)^{-\circ}$ が正則開であることをいえばよいが，これは補題 4 の (2) より明らか．

$\wedge$ の閉性　$A \cap B = (A \cap B)^{-\circ}$ を示せばよい．($\subseteq$): 自明に成り立つ包含関係 $A \cap B \subseteq (A \cap B)^-$ の両辺の開核をとって $(A \cap B)^\circ \subseteq (A \cap B)^{-\circ}$ となるが，$A \cap B$ は開なので結局 $A \cap B \subseteq (A \cap B)^{-\circ}$ である．($\supseteq$): 自明に成り立つ包含関係 $A \cap B \subseteq A$ の両辺の閉包をとり，その後に開核をとることで $(A \cap B)^{-\circ} \subseteq A^{-\circ} = A$ を得る．同様に $(A \cap B)^{-\circ} \subseteq B$ を得る．したがって $(A \cap B)^{-\circ} \subseteq A \cap B$ である．

$*$ の閉性　$A^{c\circ}$ が正則開であることをいえばよい．A は開なので A^c は閉．よって $A^c = A^{c-}$．よって $A^{c\circ} = A^{c-\circ} = (A^c)^{-\circ}$．したがって補題 4 の (2) より $A^{c\circ}$ は正則開．

単位律　$A \vee \varnothing = (A \cup \varnothing)^{-\circ} = A^{-\circ} = A.$　　$A \wedge X = A \cap X = A.$

冪等律　$A \wedge A = (A \cup A)^{-\circ} = A^{-\circ} = A.$　　$A \wedge A = A \cap A = A.$

交換律　$A \vee B = (A \cup B)^{-\circ} = (B \cup A)^{-\circ} = B \vee A.$　　$A \wedge B = A \cap B = B \cap A = B \wedge A.$

結合律　第一式：

$$A \vee (B \vee C) = A \vee (B \cup C)^{ee} \tag{7}$$
$$= [A \cup (B \cup C)^{ee}]^{ee} \tag{8}$$
$$= [A^e \cap (B \cup C)^{eee}]^e \tag{9}$$
$$= [A^e \cap (B \cup C)^e]^e \tag{10}$$
$$= [A^e \cap (B^e \cap C^e)]^e \tag{11}$$
$$= (A^e \cap B^e \cap C^e)^e \tag{12}$$

同様に $(A \vee B) \vee C = (A^e \cap B^e \cap C^e)^e$ となるのでよい．第二式：$A \wedge (B \wedge C) = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = (A \wedge B) \wedge C.$

吸収律　第一式：自明に成り立つ包含関係 $B \subseteq A^- \cup B^- = (A \cup B)^-$ の両辺の開核をとり，B が開であるこ

とに注意すれば，$B^\circ = B \subseteq (A \cup B)^{-\circ} = A \vee B$ である．したがって，$(A \vee B) \wedge B = (A \vee B) \cap B = B$ を得る．第二式：$(A \wedge B) \vee B = [(A \cap B) \cup B]^{ee} = B^{ee} = B$.

分配律　第一式：$A \vee (B \wedge C) = [A \cup (B \cap C)]^{ee} = [(A \cup B) \cap (A \cup C)]^{ee} = (A \cup B)^{ee} \cap (A \cup C)^{ee} = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$. 第二式：$A \wedge (B \vee C) = A \cap (B \cup C)^{ee} = A^{ee} \cap (B \cap C)^{ee} = [A \cap (B \cup C)]^{ee} = [(A \cap B) \cup (A \cap C)]^{ee} = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

補元律　第二式：$A^- = A^{-cc} = A^{ec}$ に注意すると，$A \wedge A^* = A \cap A^e \subseteq A^- \cap A^e = A^{ec} \cap A^e = \varnothing$.
第一式：$A \vee A^* = (A \cup A^e)^{ee} = (A^e \cap A^{ee})^e = (A^e \cap A)^e = \varnothing^e = \varnothing^{c\circ} = X^\circ = X$.

以上で，$\mathfrak{RO}(X)$ がブール代数のすべての公理を満たすことが確かめられた．　□

補題 7. 定理 5 の記号法のもと，補題 6 によって $\mathfrak{RO}(X)$ はブール代数をなすが，$\mathfrak{RO}(X)$ が誘導する順序は包含関係 $\subseteq$ であり，$\mathfrak{RO}(X)$ はこの順序に関して完備である．また，族 $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{RO}(X)$ の最小上界 $\bigvee \mathcal{F}$ と最大下界 $\bigwedge \mathcal{F}$ は具体的に次式で与えられる：

$$\bigvee \mathcal{F} = \left(\bigcup \mathcal{F}\right)^{-\circ}, \qquad \bigwedge \mathcal{F} = \left(\bigcap \mathcal{F}\right)^{-\circ}. \tag{13}$$

Proof. まず，$A, B \in \mathrm{RO}(X)$ に関して，$A \wedge B = A \iff A \cap B = A \iff A \subseteq B$ なので，$\mathfrak{RO}(X)$ が誘導する順序は包含関係である．

$\mathcal{F} \subseteq \mathrm{RO}(X)$ を任意にとり，$S := (\bigcup \mathcal{F})^{-\circ}$ とする．S が $\mathcal{F}$ の最小上界であることを示す．まず，$S \in \mathrm{RO}(X)$ は補題 4 の (2) より明らかである．

上界性，つまり任意の $A \in \mathcal{F}$ に対し $A \subseteq S$ であることをを示す．$A \in \mathcal{F}$ を任意とする．$A \subseteq \bigcup \mathcal{F}$ なので，両辺の閉包をとりその後に開核をとることで $A^{-\circ} \subseteq (\bigcup \mathcal{F})^{-\circ} = S$ となる．ところで A は正則開なので，結局 $A \subseteq S$ である．

最小性，つまり $U \in \mathrm{RO}(X)$ が $\mathcal{F}$ の上界ならば $S \subseteq U$ であることを示す．$U \in \mathrm{RO}(X)$ を $\mathcal{F}$ の上界とする．つまり $\forall A \in \mathcal{F}\,(A \subseteq U)$ とする．すると $\bigcup \mathcal{F} \subseteq U$ であり，両辺の閉包をとりその後に開核をとることで $(\bigcup \mathcal{F})^{-\circ} \subseteq U^{-\circ}$ となる．ところで U は正則開なので，結局 $S \subseteq U$ である．

$(\bigcap \mathcal{F})^{-\circ}$ が $\mathrm{RO}(X)$ に属し $\mathcal{F}$ の最大下界になっていることは全く同様に示せる．　□

補題 6 と補題 7 により，定理 5 が証明された．

参考文献

[1] Bell J. L., *Set Theory: Boolean-Valued Models and Independence Proofs* (3rd ed.), Vol. 47. Oxford Logic Guides, Oxford University Press, 2011.

[2] Givant S., Halmos P., *Introduction to Boolean Algebras*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2009.

[3] 竹内外史，現代集合論入門 [増補版]，日本評論社，1989.