集合論ノート 0017　対の公理を他の公理から導く

近藤友祐 (@elecello_)

初稿: 2019/04/10　更新: 2019/05/05
この文書の場所：　https://elecello.com/works.html

研究室で一瞬話題になって即解決された話.

定理図式 1. 任意に具体的に与えられたメタな正の自然数 n について，(高々) n-元集合の存在公理

$$\forall a_0, \dots, a_{n-1}\, \exists p\, \forall x\, (x \in p \;\leftrightarrow\; x = a_0 \vee \cdots \vee x = a_{n-1})$$

は，外延性・無限 (または冪)・置換公理図式から導ける．特に，対の公理はこれらの公理から導ける．

Proof. 無限公理によって $n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ の存在が導け，外延性公理を有限回使用してこれら n 個の要素が相異なることを示せる[*1]．論理式 $\varphi(x, y; v_0, \dots, v_{n-1})$ を $\bigvee_{j<n}(x = j \wedge y = v_j)$ により定める．φ に関する置換公理により $\forall x \in n\, \exists! y\, \varphi(x, y; a_0, \dots, a_{n-1}) \to \exists q\, \forall x \in n\, \exists y \in q\, \varphi(x, y; a_0, \dots, a_{n-1})$ が成り立つ．"$x \in n$" と "$\bigvee_{i<n}(x = i)$" の同値性と論理の公理により[*2]，前件は $\bigwedge_{i<n} \exists! y \left[\bigvee_{j<n}(i = j \wedge y = a_j)\right]$ である[*3]が，n の要素が相異なることより，これは明らかに成り立つ．よって後件，つまり

$$\exists q \bigwedge_{i<n} \exists y \left[y \in q \wedge \bigvee_{j<n} (i = j \wedge y = a_j) \right]$$

が成り立つ[*4]．再び n の要素が相異なることより，

$$\exists q\, [\exists y \in q\, (y = a_0) \wedge \cdots \wedge \exists y \in q\, (y = a_{n-1})] \qquad \text{つまり} \qquad \exists q\, (a_0 \in q \wedge \cdots \wedge a_{n-1} \in q)$$

が成り立つ．この q に対し，分出公理[*5]により $p = \{x \in q : x = a_0 \vee \cdots \vee x = a_{n-1}\}$ が存在するが，これが求めるものである．

「または冪」: この証明の冒頭では十分な個数の異なる集合を作る際に無限公理を使ったが，代わりに次のようにすればよい；述語論理の公理のみから $\exists z\, (z = z)$ が証明できる．この z に冪集合公理を適当な有限回反復する．$\mathcal{P}(\cdots(\mathcal{P}(z)))$ の元が相異なることは外延性公理の有限回の使用で確かめられる．「特に」: $n = 2$ とすればよい．□

これにより ZFC から対公理を除いた公理系も ZFC と等価なのだが，あえて対公理を除外しないのには様々な理由が考えられよう．例えば集合論の弱いフラグメント (例えば自然数上の函数が定義できる程度のもの) を考えたい際には順序対という最も基本的な概念を定義したいが，そのために置換公理図式を持ち出すのはあまりにも馬鹿げている．

[*1] 無限公理は $\exists x\, [\varnothing \in x \wedge \forall y \in x\, (y \cup \{y\} \in x)]$ であるから，無限公理の主張は対公理と和集合公理の成立を前提としており循環なのでは，と指摘されたが，これは違う．上述の論理式は単なる略記でしかなく，無限公理は正確には "$\varnothing \in x$" の部分を "$\exists u\, [\forall z (z \notin u) \wedge u \in x]$" に，"$y \cup \{y\} \in x$" の部分を "$\exists u\, [\forall z (z \in u \leftrightarrow z \in y \vee z = y) \wedge u \in x]$" に置き換えた $\in$-論理式であるから，無限公理は対や和を「意図」しているものであっても，それらが無ければ成立せず無意味，というわけではない．標語的に言えば：「対と和が，無限公理が言うところの集合の元 $\{0, 1, 2\}$ の存在を保証している」のではなく，「無限公理が，対と和を使うことなく $\{0, 1, 2\}$ の存在を保証している」．

[*2] この同値性くらいは外延性公理・無限公理の有限回の使用で示せるでしょう．

[*3] $n = 2$ のときで具体的に書くと，$\exists! y\, [(0 = 0 \wedge y = a_0) \vee (0 = 1 \wedge y = a_1)] \wedge \exists! y\, [(1 = 0 \wedge y = a_0) \vee (1 = 1 \wedge y = a_1)]$.

[*4] $n = 2$ のときで具体的に書くと，
$\exists q\, \{\exists y \in q\, [(0 = 0 \wedge y = a_0) \vee (0 = 1 \wedge y = a_1)] \;\wedge\; \exists y \in q\, [(1 = 0 \wedge y = a_0) \vee (1 = 1 \wedge y = a_1)]\}$.

[*5] 各分出公理は置換公理図式の特別な場合.