集合論ノート 0016
$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}$ の interval partition による特徴付け，その系としての $\mathfrak{s} \leqslant \mathfrak{d}$，$\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{r}$

近藤友祐 (`@elecello_`)

初稿: 2018/10/20　修正: 2019/02/03
この文書の場所：　`https://elecello.com/works.html`

[1] の §4 を読んで，同 §2, 3 の一部を再構成しただけの話。

定義 1. 集合族 $\Pi = \{I_n\}_{n\in\omega}$ が **interval partition** であるとは，それが，ω の，ω 個の有限区間への分割であることをいう．区間の番号は 0 から始めて左側から割り振り，$I_n = [i_n, i_{n+1})$ のように書く．Interval partition 全体の集合を IP と書く．$\Pi = \{I_n\}_{n\in\omega}, \Sigma = \{J_k\}_{k\in\omega} \in \mathsf{IP}$ について，Π が Σ を **dominate** する (記号：$\Sigma \sqsubseteq^* \Pi$) とは，$\forall^\infty n \, \exists k \, (J_k \subseteq I_n)$ であることをいう．

以下に現れる記法や用語の定義は [1] の §4 を参照.

定理 2.

(i) $\mathfrak{d} = \min\bigl\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \subseteq \mathsf{IP} \ \& \quad \forall \Sigma \in \mathsf{IP} \, \exists \Pi \in \mathcal{D} \, (\Sigma \sqsubseteq^* \Pi)\bigr\}$.

(ii) $\mathfrak{b} = \min\bigl\{|\mathcal{B}| \ : \mathcal{B} \subseteq \mathsf{IP} \ \& \ \neg\exists \Sigma \in \mathsf{IP} \, \forall \Pi \in \mathcal{B} \ (\Pi \sqsubseteq^* \Sigma)\bigr\}$.

Proof. まず定義を確認する．(i) について，左辺の $\mathfrak{d}$ とは $\mathfrak{D} := \langle {}^\omega\omega, {}^\omega\omega, \leqslant^* \rangle$ とした時の $\|\mathfrak{D}\|$ のこと．右辺は，ちょうど $\mathfrak{D}' := \langle \mathsf{IP}, \mathsf{IP}, \sqsubseteq^* \rangle$ とした時の $\|\mathfrak{D}'\|$ になっている．(ii) について，左辺の $\mathfrak{b}$ とは $\mathfrak{B} := \langle {}^\omega\omega, {}^\omega\omega, \not\geqslant^* \rangle$ とした時の $\|\mathfrak{B}\|$ のことで，$\mathfrak{B} = \mathfrak{D}^\perp$ となっているので，これはまさに $\|\mathfrak{D}^\perp\|$ のこと．右辺はまさに $\|\mathfrak{D}'^\perp\|$ のこと．

さて，**Galois-Tukey connection に関する基本的な事実より**[*1]，両向きの射[*2]

$$\langle \varphi_{\mathrm{c}}, \varphi_{\mathrm{r}} \rangle = \varphi : \mathfrak{D} \rightleftarrows \mathfrak{D}' : \psi = \langle \psi_{\mathrm{c}}, \psi_{\mathrm{r}} \rangle \tag{1}$$

が存在することを示せば (i) が示されたことになる．しかも，これら 2 つの射が構成されたら，**duality より** $\|\mathfrak{D}^\perp\| = \|\mathfrak{D}'^\perp\|$ となり[*3]，(ii) も示せたことになる．したがって，式 (1) の 2 つの射を構成すれば (i)(ii) を示せたことになる．以下で 2 つの射 φ, ψ を構成する．

[*1] Galois-Tukey connection に関する基本的な事実 …… ノルムは反変函手．つまり，射 $\varphi \colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}'$ が存在すれば $\|\mathfrak{D}\| \geqslant \|\mathfrak{D}'\|$.

[*2] c は challenge, r は response のつもり.

[*3] duality より …… 射 $\varphi \colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}'$ があれば，duality より $\varphi^\perp \colon \mathfrak{D}'^\perp \to \mathfrak{D}^\perp$ がある．よって $\|\mathfrak{D}'^\perp\| \geqslant \|\mathfrak{D}^\perp\|$ となる．さらに，射 $\psi \colon \mathfrak{D}' \to \mathfrak{D}$ があれば，duality より $\psi^\perp \colon \mathfrak{D}^\perp \to \mathfrak{D}'^\perp$ がある．よって $\|\mathfrak{D}^\perp\| \geqslant \|\mathfrak{D}'^\perp\|$ となる．したがって $\|\mathfrak{D}^\perp\| = \|\mathfrak{D}'^\perp\|$.

$\boxed{\varphi\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}' \text{ の構成}}$ $\varphi = \langle \varphi_{\mathrm{c}}, \varphi_{\mathrm{r}} \rangle$ が満たすべきは，$\varphi_{\mathrm{c}}\colon \mathsf{IP} \to {}^{\omega}\omega$，$\varphi_{\mathrm{r}}\colon {}^{\omega}\omega \to \mathsf{IP}$，そして

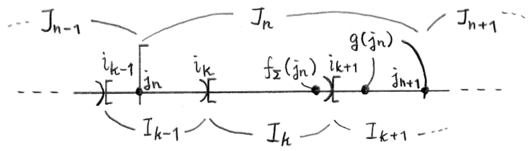
$$\forall \Sigma \in \mathsf{IP}\, \forall g \in {}^{\omega}\omega\, (\varphi_{\mathrm{c}}(\Sigma) \leqslant^{*} g \implies \Sigma \sqsubseteq^{*} \varphi_{\mathrm{r}}(g)) \tag{2}$$

である．$\Sigma = \{I_n\}_{n\in\omega} \in \mathsf{IP}$ および $g \in {}^{\omega}\omega$ に対し，$\varphi_{\mathrm{c}}(\Sigma)$ および $\varphi_{\mathrm{r}}(g)$ を以下に定義する：

$$\begin{cases} \varphi_{\mathrm{c}}(\Sigma) = f_{\Sigma}\colon \omega \to \omega, \qquad \text{where } f_{\Sigma}(x) := i_{2+\mu n(x\in I_n)} - 1, & (3) \\ \varphi_{\mathrm{r}}(g) = \Pi_g = \{J_n\}_{n\in\omega} \in \mathsf{IP}, \qquad \text{where } j_0 = 0,\ j_{n+1} = 1 + \max\{j_n, g``[0, j_n]\}. & (4) \end{cases}$$

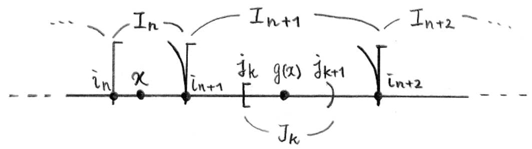
このように定めると[*4]，明らかに次が満たされる[*5]：

$$\begin{cases} f_{\Sigma}(x) = \text{“}x \text{ が属する区間の次の区間の右端点”，つまり}\quad x \in I_n \text{ なら } f_{\Sigma}(x) = i_{n+2} - 1, & (5) \\ x \leqslant j_n \text{ なら } g(x) < j_{n+1}. & (6) \end{cases}$$



この $\varphi = \langle \varphi_{\mathrm{c}}, \varphi_{\mathrm{r}} \rangle$ が式 (2) を満たすことをみるために，$\Sigma = \{I_n\}_{n\in\omega} \in \mathsf{IP}$，$g \in {}^{\omega}\omega$ を任意に取り，$f_{\Sigma} \leqslant^{*} g$ を仮定する [want: $\Sigma \sqsubseteq^{*} \Pi_g$，つまり，$\Pi_g = \{J_n\}_{n\in\omega}$ と書いたときに，$\forall^{\infty} n \exists k\, (I_k \subseteq J_n)$]．$n \in \omega$ を十分大きくとる[*6]．$j_n \in I_{k-1}$ なる k がとれる．この k が望みのものであることを見る．$j_n \in I_{k-1}$ なので，$f_{\Sigma} = \varphi_{\mathrm{c}}(\Sigma)$ の定め方より $f_{\Sigma}(j_n) = i_{k+1} - 1$ である．仮定より，十分大きい点で $f_{\Sigma} \leqslant g$ なので，$f_{\Sigma}(j_n) \leqslant g(j_n) \leqslant j_{n+1} - 1$ である (2 番目の不等号は，$\Pi_g = \varphi_{\mathrm{r}}(g)$ の定め方から $x \leqslant j_n \to g(x) < j_{n+1}$ となることによる)．以上をまとめると $j_n < i_k \leqslant i_{k+1} - 1 = f_{\Sigma}(j_n) \leqslant j_{n+1} - 1$ となり，$I_k \subseteq J_n$ となる．

$\boxed{\psi\colon \mathfrak{D}' \to \mathfrak{D} \text{ の構成}}$



$\psi = \langle \psi_{\mathrm{c}}, \psi_{\mathrm{r}} \rangle = \langle \varphi_{\mathrm{r}}, \varphi_{\mathrm{c}} \rangle$ が望みのものである．示すべきは $\forall g \in {}^{\omega}\omega\, \forall \Sigma \in \mathsf{IP}\, (\Pi_g \sqsubseteq^{*} \Sigma \implies g \leqslant^{*} f_{\Sigma})$ である．$g \in {}^{\omega}\omega$，$\Sigma = \{I_n\}_{n\in\omega} \in \mathsf{IP}$ を任意に取り，$\Pi_g \sqsubseteq^{*} \Sigma$ を仮定する．$\Pi_g = \{J_n\}_{n\in\omega}$ と書く．$g \leqslant^{*} f_{\Sigma}$ を示すため，x を十分大きくとる[*7]．何らかの n に対して $x \in I_n$ である．仮定より $\forall^{\infty} m\, \exists k\, (J_k \subseteq I_m)$ なので，特に $m = n+1$ として，$J_k \subseteq I_{n+1}$ なる $J_k \in \Pi_g$ を得る．$x < i_{n+1} \leqslant j_k$ なので，Π_g の定め方から $g(x) < j_{k+1}$ である．よって，f_{Σ} の定め方から $g(x) \leqslant j_{k+1} - 1 \leqslant i_{n+2} - 1 = f_{\Sigma}(x)$ となり，示せた． □

[*4] $j_{n+1} = 1 + \max(g``[0, j_n])$ としてしまうと，$\{J_n\}_{n\in\omega}$ が int. part. にならなくなる可能性がある．例えば，$g = 0$ (const.) なら $j_0 = 0$，$j_1 = 1$，$j_2 = 1$ となってしまう．

[*5] むしろ以下の性質が満たされるということが重要なのであって，φ の定義の子細は重要でない．

[*6] この議論は次のように正当化される：まず，示すべきことを正確に書くと $\exists n_0 \in \omega\, \forall n \geqslant n_0\, \exists k\, (I_k \subseteq J_n)$ である．$f_{\Sigma} \leqslant^{*} g$ なので，ある $x_0 \in \omega$ が存在して $\forall x \geqslant x_0\, (f_{\Sigma}(x) \leqslant g(x))$ である．$n \in \omega$ を取るごとに，$j_n \in I_{k-1}$ なる k が一意に定まる．明らかに，n がある値 n_0 以上であるとき，j_n に対応する i_k は必ず $\geqslant x_0$ となる．そこで，“$n \in \omega$ を十分大きくとる” というのは，“$n \geqslant n_0$ とする” の意．

[*7] この議論は次のように正当化される：$\Pi_g \sqsubseteq^{*} \Sigma$ を正確に書くと，$\exists n_0\, \forall n \geqslant n_0\, \exists k\, (J_k \subseteq I_n)$ である．x_0 を，$x_0 \in I_{n_0}$ なるものとする．すると，$x \geqslant x_0$ なら，ある $n \geqslant n_0$ が存在して $x \in I_n$ となり，以下の議論が通る．

定義 3. (i) $X \subseteq \omega$ が $Y \in [\omega]^\omega$ を **split** する (記号：$X \text{ sp } Y$) $:\Longleftrightarrow$ $|Y \cap X| = |Y \setminus X| = \omega$.

(ii) $X \text{ sp}^{\text{op}}\, Y \;:\Leftrightarrow\; Y \text{ sp } X$.

(iii) $\mathfrak{S} := \langle [\omega]^\omega, \mathcal{P}(\omega),\ \text{sp}^{\text{op}} \rangle$, $\quad \mathfrak{R} := \mathfrak{S}^\perp$.

(iv) $\mathfrak{s} := \|\mathfrak{S}\|$ (**splitting** number), $\quad \mathfrak{r} := \|\mathfrak{R}\| = \|\mathfrak{S}^\perp\|$ (**reaping** number).

これらを explicit に書くと，

$$\begin{cases} \mathfrak{s} := \min\bigl\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega) \;\&\; \forall X \in [\omega]^\omega\, \exists Y \in \mathcal{S}\,(Y \text{ sp } X)\bigr\}, & (7) \\ \mathfrak{r} := \min\bigl\{|\mathcal{R}| : \mathcal{R} \subseteq [\omega]^\omega \;\&\; \neg\exists X \subseteq \omega\, \forall Y \in \mathcal{R}\,(X \text{ sp } Y)\bigr\}. & (8) \end{cases}$$

系 4. $\mathfrak{s} \leqslant \mathfrak{d}$.

Proof. 定理 2 により，$\mathfrak{D}' = \langle \mathsf{IP}, \mathsf{IP}, \sqsubseteq^* \rangle$ から $\mathfrak{S} = \langle [\omega]^\omega, \mathcal{P}(\omega),\ \text{sp}^{\text{op}} \rangle$ への射 $\varphi = \langle \varphi_{\text{c}}, \varphi_{\text{r}} \rangle$ を構成すればよい*8．$X \in [\omega]^\omega$ および $\Pi = \{I_n\}_{n\in\omega} \in \mathsf{IP}$ に対し，$\varphi = \langle \varphi_{\text{c}}, \varphi_{\text{r}} \rangle$ を以下に定義する：

$$\begin{cases} \varphi_{\text{c}}(X) = \{J_n\}_{n\in\omega} \in \mathsf{IP}, \qquad \text{where } j_0 = 0,\ j_{n+1} = \min\bigl\{k : (j_n, k] \cap X \neq \varnothing\bigr\} & (9) \\ \varphi_{\text{r}}(\Pi) = \bigsqcup_{n\in\omega} I_{2n}. & (10) \end{cases}$$

このように定めると，各 J_n は X の元を少なくとも一つ (実はちょうど一つ) 持つ*9．示すべきは

$$\forall X \in [\omega]^\omega\, \forall \Pi \in \mathsf{IP}\,(\varphi_{\text{c}}(X) \sqsubseteq^* \Pi \implies \varphi_{\text{r}}(\Pi) \text{ sp } X) \tag{11}$$

である．これを示すために，$X \in [\omega]^\omega$, $\Pi = \{I_n\}_{n\in\omega}$ を任意に取り，$\varphi_{\text{c}}(X) = \{J_n\}_{n\in\omega}$ と書くことにする．$\forall^\infty n\, \exists k\,(J_k \subseteq I_k)$ を仮定する．すると，明らかに $\bigsqcup_{n\in\omega} I_{2n}\ (= \varphi_{\text{r}}(\Pi))$ も $\bigsqcup_{n\in\omega} I_{2n+1}\ (= \omega \setminus \varphi_{\text{r}}(\Pi))$ も X の点を無限個含む．したがって，$X \cap \varphi_{\text{r}}(\Pi)$ も $X \setminus \varphi_{\text{r}}(\Pi) = X \cap (\omega \setminus \varphi_{\text{r}}(\Pi))$ も無限である．よって $\varphi_{\text{r}}(\Pi) \text{ sp } X$. □

系 5. $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{r}$.

Proof. 系 4 の証明より，射 $\varphi\colon \mathfrak{D}' \to \mathfrak{S}$ が存在する．**Galois-Tukey connection に関する基本的な事実より***10，$\mathfrak{b} = \|\mathfrak{D}^\perp\| = \|\mathfrak{D}'^\perp\| \leqslant \|\mathfrak{S}^\perp\| = \mathfrak{r}$ となる． □

参考文献

[1] Blass, A., *Combinatorial Cardinal Characteristics of the Continuum*, In: Foreman, M., Kanamori, A. (Eds.), Handbook of Set Theory, vol.2, Springer, pp. 395-489, 2009.
PDF is available at: `http://www.math.lsa.umich.edu/~ablass/hbk.pdf`

[2] Devlin, K., *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory* (2nd ed.), Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1993.

*8 そうすれば，定理 2 より $\|\mathfrak{S}\| \leqslant \|\mathfrak{D}'\| = \|\mathfrak{D}\| = \mathfrak{d}$.

*9 むしろ，この性質が満たされるということが重要なのであって，φ_{c} の定義の子細は重要でない．また，「ちょうど一つ」なのは本質的でなく，各 J_n が少なくとも一つ X の元をもっていることが重要である．

*10 Galois-Tukey connection に関する基本的な事実 …… **双対とノルムの合成 $\|\cdot\| \circ \perp$ は共変函手．** つまり，射 $\varphi\colon \mathfrak{D}' \to \mathfrak{S}$ が存在すれば $\|\mathfrak{D}'^\perp\| \leqslant \|\mathfrak{S}^\perp\|$.

[3] Jech, T., *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2002.
[4] Kunen, K., *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, Vol. 102. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1980. 邦訳 [14].
[5] Kunen, K., *The Foundations of Mathematics*, Vol. 19. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2009. 邦訳 [15].
[6] Kunen, K., *Set Theory* (rev. ed.), Vol. 34. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.
[7] Schindler, R., *Set Theory, Exploring Independence and Truth*, Universitext, Springer, 2014.
[8] Shoenfield. J.R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.
[9] Takeuti, G. and Zaring, W.M., *Introduction to Axiomatic Set Theory* (2nd ed.), Vol. 1. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1982.
[10] Weaver, N., *Forcing for Mathematicians*, World Scientific Publishing, 2014.
[11] 新井敏康, 数学基礎論, 岩波書店, 2011.
[12] 菊池誠, 不完全性定理, 共立出版, 2014.
[13] 倉田令二朗・篠田寿一, 公理論的集合論, 倉田令二郎監修・数学基礎論シリーズ 2 巻, 河合文化教育研究所, 1996.
[14] K. キューネン（藤田博司訳）, 集合論–独立性証明への案内, 日本評論社, 2008. [4] の邦訳.
[15] K. キューネン（藤田博司訳）, キューネン数学基礎論講義, 日本評論社, 2016. [5] の邦訳.
[16] 田中一之編・著, 数学基礎論講義, 日本評論社, 1997.
[17] 田中一之編, ゲーデルと 20 世紀の論理学 4 集合論とプラトニズム, 東京大学出版会, 2007.
[18] 田中一之・鈴木登志雄, 数学のロジックと集合論, 培風館, 2003.
[19] 田中尚夫, 公理的集合論, 現代数学レクチャーズ (B-10), 培風館, 1982.
[20] 田中尚夫, 選択公理と数学–発生と論争、そして確立への道 (増訂版), 遊星社, 2005.