集合論ノート 0015
有限個の箇所で GCH を好きなように破る その 1

近藤友祐 (@elecello_)

初稿: 2018/10/14
この文書の場所： https://elecello.com/works.html

補題 1. $\mathbb{P}$ がすべての基数を保存するならば，$\forall\alpha < \mathrm{o}(M)\ \left(\aleph_\alpha^M = \aleph_\alpha^{M[G]}\right)$.

Proof. 帰納法による．$\alpha = 0$ に対しては明らか．極限順序数 η について，帰納法の仮定として $\xi < \eta$ で成り立っているとする．$\sup\,(=\bigcup)$ の絶対性より，$\aleph_\eta^M = \sup_{\xi<\eta}\aleph_\xi^M = \sup_{\xi<\eta}\aleph_\xi^{M[G]} = \aleph_\eta^{M[G]}$．後続順序数について．帰納法の仮定として $\aleph_\alpha^M = \aleph_\alpha^{M[G]}$ を仮定する．$\min\,(=\bigcap)$ の絶対性より，$\aleph_{\alpha+1}^M = \min\{\kappa > \aleph_\alpha^M : \mathrm{Card}(\kappa)^M\} = \min\{\kappa > \aleph_\alpha^{M[G]} : \mathrm{Card}(\kappa)^{M[G]}\} = \aleph_{\alpha+1}^{M[G]}$ なのでよい．ここで，中央の "=" について，$\beta \in \{\kappa > \aleph_\alpha^M : \mathrm{Card}(\kappa)^M\} \iff \beta > \aleph_\alpha^M \wedge \mathrm{Card}(\beta)^M \iff \beta > \aleph_\alpha^{M[G]} \wedge \mathrm{Card}(\beta)^{M[G]} \iff \beta \in \{\kappa > \aleph_\alpha^{M[G]} : \mathrm{Card}(\kappa)^{M[G]}\}$ からよい．ここに，帰納法の仮定 $\aleph_\alpha^M = \aleph_\alpha^{M[G]}$ および基数の保存の仮定 $\mathrm{Card}(\beta)^M \leftrightarrow \mathrm{Card}(\beta)^{M[G]}$ を用いた． □

注意 2. (1) 「基数の保存」と「濃度の保存」は異なる．$\mathbb{P}$ が基数を保存するからといって，$\mathfrak{c}^M = \mathfrak{c}^{M[G]}$ とは限らない[*1]．これは，$\mathfrak{c}$ は ω の「冪集合」の「濃度」として定義され，それがどのアレフに対応するかはモデルに依存するから．例えば，$(\mathfrak{c} = \aleph_1)^M$, $(\mathfrak{c} = \aleph_2)^{M[G]}$ ということも起こり得て，たとえ基数を保存するとしても，というか基数を保存することが仇となって，$\mathfrak{c}^M = \aleph_1^M = \aleph_1^{M[G]} < \aleph_2^{M[G]} = \mathfrak{c}^{M[G]}$.

(2) 前述の通り，すべての基数を保存するならばアレフ系列は必ず一致する．しかし，例えば "$\aleph_2$ 以上の基数を保存する" とだけ言った場合，アレフ系列が一致するとは限らない．というのも，M の $\aleph_1$ が潰されて $M[G]$ での可算順序数になり，M の $\aleph_2$ が $M[G]$ の $\aleph_1$ になった場合，アレフ系列が有限のところで 1 だけズレて，すべての $1 \leqslant n < \omega$ について $\aleph_{n+1}^M = \aleph_n^{M[G]}$ となる[*2]. □

定理 3. $M \models \mathrm{ZFC}$: ctm とし，$\kappa = \aleph_\alpha^M$ & $\lambda = \aleph_\beta^M$, $\alpha, \beta < \mathrm{o}(M)$ とする．
さらに $(\aleph_0 \leqslant \lambda < \kappa\ \&\ \mathrm{Reg}(\lambda)\ \&\ \kappa^\lambda = \kappa\ \&\ 2^{<\lambda} = \lambda)^M$ を仮定し，$\mathbb{P} := \mathrm{Fn}_\lambda(\kappa \times \lambda, 2)^M$ と定める．このとき，ある $\mathbb{P}$-generic 拡大 $M[G]$ が存在して $(2^\lambda = \kappa)^{M[G]}$ が成り立つ．

Proof. Rasiowa-Sikorski の補題を用い，$(M, \mathbb{P})$-generic filter G を勝手に取り固定する．
$\boxed{\mathbb{P}\text{ はすべての基数を保つ}}$ $I := \kappa \times \lambda$, $J := 2 \in M$ として「集合論ノート 0014」[*3] の主定理を適用せよ[*4].
$\boxed{(2^\lambda \geqslant \kappa)^{M[G]}}$ $F := \bigcup G$ と定める．明らかに $F \in M[G]$ である．

[*1] というか，我々の目標は $\mathfrak{c}^M \neq \mathfrak{c}^{M[G]}$ なるモデル $M[G]$ を作ること．
[*2] だから，アレフベースで話が進められるのは特殊な場合だけであって，アレフベースで議論を進めるのはあまり良くないのかも...
[*3] http://elecello.com/doc/set/set0014.pdf
[*4] ここでは，κ, λ の基数演算に関する性質が用いられる．

Claim 1. $F\colon \kappa\times\lambda \xrightarrow{\text{onto}} 2$.

$[\because]$ $I, J\in M$ を上の通りとする．$(|I|=\kappa>\lambda,\ J\neq\varnothing)^M$ に注意する．《F が函数で $\mathrm{dom}(F)\subseteq I$, $\mathrm{rng}(F)\subseteq J$ であること》 G の filter 性より，各 $p, q\in G$ は函数として両立する．よって，G に属する函数 (のグラフ) たちを張り合わせたものである F は再び函数 (のグラフ) である．各 $p\in G$ に対して $\mathrm{dom}(p)\subseteq I$, $\mathrm{rng}(p)\subseteq J$ なので，dom と rng については明らか．《$\mathrm{dom}(F)=I$》 各 $i\in I$ に対し $D_i:=\{q\in\mathbb{P} : i\in\mathrm{dom}(q)\}\in M$ とする．各 D_i は $\mathbb{P}$ で dense である．何となれば : $p\in\mathbb{P}$ を勝手に取る．$i\in\mathrm{dom}(p)$ なら，$q:=p$ を証拠に $q\leqslant q$, $q\in D_i$ なので OK．$i\notin\mathrm{dom}(q)$ とする．$J\neq\varnothing$ なので，何らかの $j_0\in J$ が取れる．$q:=p\cup\{\langle i, j_0\rangle\}$ とすれば，$(|q|<\lambda)^M$ より $q\in\mathbb{P}$ で，$q\leqslant p$, $p\in D_i$ なので OK．$I\subseteq\mathrm{dom}(F)$ を示すために $i\in I$ とする．G の genericity より，元 $q\in G\cap D_i$ が取れる．$i\in\mathrm{dom}(q)\subseteq\mathrm{dom}(F)$ なので OK．《$\mathrm{rng}(F)=J$》 各 $j\in J$ に対し $R_j:=\{q\in\mathbb{P} : j\in\mathrm{rng}(q)\}\in M$ とする．各 R_j は $\mathbb{P}$ で dense である．何となれば : $p\in\mathbb{P}$ を勝手に取る．$j\in\mathrm{rng}(p)$ なら，$q:=p$ を証拠に $q\leqslant q$, $q\in R_j$ なので OK．$j\notin\mathrm{rng}(q)$ とする．$(|I|>\lambda>|\mathrm{dom}(p)|)^M$ なので，$i_0\notin\mathrm{dom}(p)$ なる $i_0\in I$ が取れる．$q:=p\cup\{\langle i_0, j\rangle\}$ とすれば，$(|q|<\lambda)^M$ より $q\in\mathbb{P}$ で，$q\leqslant p$, $p\in R_j$ なので OK．$J\subseteq\mathrm{dom}(F)$ を示すために $j\in J$ とする．G の genericity より，元 $q\in G\cap R_j$ が取れる．$j\in\mathrm{rng}(q)\subseteq\mathrm{rng}(F)$ なので OK．　$\square$(Claim 1)

いま，$\kappa=(\aleph_\alpha)^M=(\aleph_\alpha)^{M[G]}$ であることに注意．以下，$M[G]$ で議論する．κ 個の函数列 $\langle\chi_\delta : \delta<\kappa\rangle$ を，$\chi_\delta\colon\lambda\to 2$, $\chi_\delta(\xi)=F(\delta,\xi)$ で定める〔インフォーマルには，G が「κ 個の『λ の部分集合』」をコーディングしていると考える (各 χ_δ を λ の部分集合の特性函数と捉えよ)．χ たちが本当に κ 個あることを見るには，これらが互いに異なることを示さねばならない〕．

Claim 2. $\forall\gamma,\delta<\kappa\,(\gamma\neq\delta\to\chi_\gamma\neq\chi_\delta)$.

$[\because]$ 各 $\gamma,\delta<\kappa$, $\gamma\neq\delta$ に対し，

$$D_{\gamma\delta}:=\{p\in\mathbb{P} : \exists\xi<\lambda\,(\langle\gamma,\xi\rangle,\langle\delta,\xi\rangle\in\mathrm{dom}(p)\ \&\ p(\gamma,\xi)\neq p(\delta,\xi))\}$$

と定めると，各 $D_{\gamma\delta}$ は $\mathbb{P}$ で dense となる．何となれば : $q\in\mathbb{P}$ を勝手に取る．$|\mathrm{dom}(q)|<\lambda$ なので，ある $\xi_0\in\lambda$ が存在して $\langle\gamma,\xi_0\rangle,\langle\delta,\xi_0\rangle\notin\mathrm{dom}(q)$ が成り立つ．$p:=q\cup\{\langle\langle\delta,\xi_0\rangle,0\rangle,\langle\langle\gamma,\xi_0\rangle,1\rangle\}$ と定めよ．$p\in\mathbb{P}$ で $p\leqslant q$ となる．$\xi=\xi_0$ を証拠に $p\in D_{\gamma\delta}$ である．

G の genericity より，元 $r\in G\cap D_{\gamma\delta}$ が取れる．$r\in G$ より $r\subseteq F$ で，r は F の $\mathrm{dom}(r)$ への制限である．$r\in D_{\gamma\delta}$ より，ある $\xi_1<\lambda$ が存在して $\langle\gamma,\xi_1\rangle,\langle\delta,\xi_1\rangle\in\mathrm{dom}(r)$, $r(\gamma,\xi_1)\neq r(\delta,\xi_1)$ が成り立つ．よって，$\chi_\gamma(\xi_1)=F(\gamma,\xi_1)=r(\gamma,\xi_1)\neq r(\delta,\xi_1)=F(\delta,\xi_1)=\chi_\delta(\xi_1)$ となり，$\chi_\gamma\neq\chi_\delta$ を得る．　$\square$(Claim 2)

Claim 2 より，$\mathcal{F}:=\Big\{\{\xi\in\lambda : \chi_\delta(\xi)=1\} : \delta<\kappa\Big\}\subseteq\mathcal{P}(\lambda)$ とすれば $|\mathcal{F}|=\kappa$ となる．したがって $\kappa\leqslant 2^\lambda$ を得る[*5]．

$\boxed{(2^\lambda\leqslant\kappa)^{M[G]}}$ $\mathbb{P}=\mathrm{Fn}_\lambda(\kappa\times\lambda,2)^M$ であった．

<u>M で :</u> $\lambda\geqslant\aleph_0$ より，「集合論ノート 0012」[*6] から $\mathbb{P}$: $(|J|^{<\lambda})^+$-cc を得る．仮定より $(|J|^{<\lambda})^+=(2^{<\lambda})^+=\lambda^+$ なのだから，結局 $\mathbb{P}$ は λ^+-cc をもつ．

$|\mathbb{P}|$ について．$|\mathbb{P}|=\kappa$ である．何となれば : 一点函数を考えれば明らかなように，$|\mathbb{P}|\geqslant\kappa$ である．逆に

---

*5 こちら向き，すなわち "$(2^\lambda\geqslant\kappa)$" の証明には，$\kappa,\lambda$ の基数計算に関する仮定はほとんど用いられていない．

*6 http://elecello.com/doc/set/set0012.pdf

$|\mathbb{P}| \leqslant \kappa$ を示す．まず，domain の定め方が $|[\kappa \times \lambda]|^{<\lambda} = |\kappa \times \lambda|^{<\lambda} = \kappa^{<\lambda} \leqslant \kappa^{\lambda} = \kappa$ 通り．そのそれぞれについて，値の定め方が高々 $2^{<\lambda} = \lambda$ 通り．よって，$|\mathbb{P}| \geqslant \kappa \cdot \lambda = \kappa$ を得る．

以上より，$\check{\lambda}$ の部分集合の nice name の総数は高々 $|\mathbb{P}|^{|\operatorname{dom}(\check{\lambda})| \cdot \lambda} = \kappa^{\lambda \cdot \lambda} = \kappa^{\lambda} = \kappa$ 個以下である（「集合論ノート 0013」[*7]）．これらすべての「$\check{\lambda}$ の部分集合の nice name」を並べ上げ，$\{\vartheta_\xi : \xi < \kappa\} \in M$ とする．その上で，$\mathring{f} := \{\langle \mathrm{op}(\check{\xi}, \vartheta_\xi), \mathbb{1}\rangle : \xi < \kappa\} \in M$ と定める．

$\underline{M[G] \text{ で：}}$ （必要に応じて “$M[G] \models$” を明記することもある） $\mathring{f}_G = \{\langle \xi, \vartheta_\xi^G \rangle : \xi < \kappa\}$ である．よって $\mathring{f}_G$ は函数 $\mathring{f}_G : \xi \mapsto \vartheta_\xi^G$, $(\xi < \kappa)$ になっている．$\kappa = (\aleph_\alpha)^M = (\aleph_\alpha)^{M[G]}$ に注意．『任意の s を取り，$M[G] \models s \in \mathcal{P}(\lambda)$ を仮定する．$M[G]$ の推移性より $s \in M[G]$．よって，ある $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ が存在して $s = \sigma_G$ が成り立つ．$\sigma, \check{\lambda} \in M^{\mathbb{P}}$ なので，Nice Name Lemma（「集合論ノート 0013」[*8]）により，ある「$\check{\lambda}$ の部分集合に対する nice name」$\vartheta \in M^{\mathbb{P}}$ が存在して $\mathbb{1} \Vdash \sigma \subseteq \check{\lambda} \to \sigma = \vartheta$ が成り立つ．ここで，$\check{\lambda}$ の部分集合に対する nice name は整列されていたから，ある $\xi < \kappa$ が存在して $\mathbb{1} \Vdash \sigma \subseteq \check{\lambda} \to \sigma = \vartheta_\xi$ が成り立つ．真理補題より，$M[G] \models s \subseteq \lambda \to s = \vartheta_\xi^G$ である．$M[G] \models s \subseteq \lambda$ を仮定していたので，$M[G] \models s = \vartheta_\xi^G$，すなわち $M[G] \models \mathring{f}_G(\xi) = s$ である．』以上『』の議論より，$M[G] \models s \in \mathcal{P}(\lambda) \to \exists \xi < \kappa\, (\mathring{f}_G(\xi) = s)$ が成り立つ．すなわち，$M[G] \models \mathrm{rng}(\mathring{f}_G) \supseteq \mathcal{P}(\lambda)$ である．両辺の濃度を考えれば，$M[G] \models \kappa \geqslant |\mathrm{rng}(\mathring{f}_G)| \geqslant 2^{\lambda}$ となり，所望の結果を得る． □

参考文献

本稿では，主に [5], Ch.IV, §3, §7 を参考にしました．対応する定理番号の明記は行っていません．

[1] Devlin, K., *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory* (2nd ed.), Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1993.

[2] Jech, T., *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2002.

[3] Kunen, K., *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, Vol. 102. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1980. 邦訳 [13].

[4] Kunen, K., *The Foundations of Mathematics*, Vol. 19. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2009. 邦訳 [14].

[5] Kunen, K., *Set Theory* (rev. ed.), Vol. 34. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.

[6] Schindler, R., *Set Theory, Exploring Independence and Truth*, Universitext, Springer, 2014.

[7] Shoenfield. J.R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

[8] Takeuti, G. and Zaring, W.M., *Introduction to Axiomatic Set Theory* (2nd ed.), Vol. 1. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1982.

[9] Weaver, N., *Forcing for Mathematicians*, World Scientific Publishing, 2014.

[10] 新井敏康, 数学基礎論, 岩波書店, 2011.

[11] 菊池誠, 不完全性定理, 共立出版, 2014.

[*7] `http://elecello.com/doc/set/set0013.pdf`

[*8] `http://elecello.com/doc/set/set0013.pdf`

[12] 倉田令二朗・篠田寿一, 公理論的集合論, 倉田令二郎監修・数学基礎論シリーズ 2 巻, 河合文化教育研究所, 1996.
[13] K. キューネン（藤田博司訳）, 集合論–独立性証明への案内, 日本評論社, 2008. [3] の邦訳.
[14] K. キューネン（藤田博司訳）, キューネン数学基礎論講義, 日本評論社, 2016. [4] の邦訳.
[15] 田中一之編・著, 数学基礎論講義, 日本評論社, 1997.
[16] 田中一之編, ゲーデルと 20 世紀の論理学 4 集合論とプラトニズム, 東京大学出版会, 2007.
[17] 田中一之・鈴木登志雄, 数学のロジックと集合論, 培風館, 2003.
[18] 田中尚夫, 公理的集合論, 現代数学レクチャーズ (B-10), 培風館, 1982.
[19] 田中尚夫, 選択公理と数学–発生と論争、そして確立への道 (増訂版), 遊星社, 2005.