集合論ノート 0014
λ-distributive poset と λ 以下の基数の保存

近藤友祐 (@elecello_)

初稿: 2018/10/10　修正: 2018/10/15
この文書の場所： https://elecello.com/works.html

本稿では，特に断りの無い場合，M は ZFC の ctm，$\mathbb{P}$ は poset とし，$\mathbb{P} \in M$ を仮定する．また，τ_G の G は省略することもある．

定義 1. $\mathrm{Card}(\lambda)^M$ なる λ に関して，

(1) $\mathbb{P}$ が λ 以下の基数を保つ

$$:\Longleftrightarrow\ \forall G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic}\,\forall\beta<\mathrm{o}(M)\ \left[\beta\leqslant\lambda\to\left(\mathrm{Card}(\beta)^M\leftrightarrow\mathrm{Card}(\beta)^{M[G]}\right)\right]. \tag{1}$$

(2) $\mathbb{P}$ が λ 以下の共終数を保つ

$$:\Longleftrightarrow\ \forall G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic}\,\forall\,\mathrm{limit}\,\gamma<\mathrm{o}(M)\ \left[\mathrm{cf}^M(\gamma)\leqslant\lambda\to\left(\mathrm{cf}^M(\gamma)=\mathrm{cf}^{M[G]}(\gamma)\right)\right]. \tag{2}$$

各条件の “$\beta\leqslant\lambda\to$”, “$\mathrm{cf}^M(\gamma)\leqslant\lambda\to$” を取り払った場合，(すべての) 基数を保つ，(すべての) 共終数を保つ，という． □

注意 2. 式 (1) の “$\leftarrow$” は常に成り立つ．なぜならば，$\mathrm{Card}(\cdot)$ は Π_1 論理式であるから，下向き ($M[G]$ から M) に相対化するため．また，式 (2) の “$\geqslant$” は常に成り立つ．なぜならば，$\subseteq,\sup,\mathrm{type}$ の M や $M[G]$ に対する絶対性より，$\mathrm{cf}^M(\gamma)=\min\{\mathrm{type}(X): X\subseteq\gamma\wedge\sup X=\gamma\wedge X\in M\}$, $\mathrm{cf}^{M[G]}(\gamma)=\min\{\mathrm{type}(X): X\subseteq\gamma\wedge\sup X=\gamma\wedge X\in M[G]\}$ であるが，M から $M[G]$ へと X の捜索範囲が広がった分，最小値としては落ちるため． □

補題 3.

$$\mathbb{P}\text{ が共終数を保つ}\iff\forall G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic}\,\forall\,\mathrm{limit}\,\beta<\mathrm{o}(M)\ \left[\beta>\omega\to\left(\mathrm{Reg}(\beta)^M\to\mathrm{Reg}(\beta)^{M[G]}\right)\right].$$

Proof. $\boxed{(\Longrightarrow)}$ 右辺を示すために，$(M,\mathbb{P})$-generic filter G，$(\omega<)\ \beta<\mathrm{o}(M):\lim$ を取り，$\mathrm{Reg}(\beta)^M$ を仮定せよ．$\mathrm{Reg}(\beta)^M$ より $\mathrm{cf}^M(\beta)=\beta$ である．今，$\beta<\mathrm{o}(M):\lim$ であり，$\mathbb{P}$ は共終数を保つので，$\mathrm{cf}^M(\beta)=\mathrm{cf}^{M[G]}(\beta)$ を得る．したがって $\mathrm{cf}^{M[G]}(\beta)=\beta$，つまり $\mathrm{Reg}(\beta)^{M[G]}$ である．
$\boxed{(\Longleftarrow)}$ 左辺を示すために，$(M,\mathbb{P})$-generic filter G，$\gamma<\mathrm{o}(M):\lim$ を固定せよ．$\beta:=\mathrm{cf}^M(\gamma)$ とする (want: $\beta=\mathrm{cf}^{M[G]}(\gamma)$)．まず，$\mathrm{Reg}(\beta)^{M[G]}$ を導く．$\beta=\omega$ の場合は明らか．$\beta>\omega$ の場合，極限順序数の共終数は正則なので，$\mathrm{Reg}(\beta)^M$ である．このことと $\omega<\beta<\mathrm{o}(M)$ を合わせて，仮定から $\mathrm{Reg}(\beta)^{M[G]}$ となるのでよい．したがって，$\mathrm{cf}^{M[G]}(\beta)=\beta$ である．さて，$\beta=\mathrm{cf}^M(\gamma)$ であるから

$M \models \exists X\,(X \subseteq \gamma \wedge \sup X = \gamma \wedge \mathrm{type}(X) = \beta)$ が成り立っている．このような $X \in M$ を固定する．$\subseteq, \sup, \mathrm{type}$ の M に対する絶対性より，$X \subseteq \gamma \wedge \sup X = \gamma \wedge \mathrm{type}(X) = \beta$ が ($\mathbf{V}$ で) 成り立つ．ZFC で "$Y \subseteq \delta \wedge \delta\colon \lim \wedge \sup Y = \delta \Longrightarrow \mathrm{cf}(\delta) = \mathrm{cf}(\mathrm{type}\,Y)$" が証明できる．そこで Y, δ として $X, \gamma \in M[G]$ を取れば，$M[G] \models$ ZFC や type の絶対性などに注意して $\mathrm{cf}^{M[G]}(\gamma) = \mathrm{cf}^{M[G]}(\mathrm{type}\,X) = \mathrm{cf}^{M[G]}(\beta) = \beta$ となるのでよい． □

補題 4. $\mathbb{P}$ が共終数を保てば，$\mathbb{P}$ は基数を保つ．

Proof. $G\colon (M, \mathbb{P})$-generic，および $\kappa < \mathrm{o}(M)$ を取り固定する．$\mathrm{Card}(\kappa)^M \leftrightarrow \mathrm{Card}(\kappa)^{M[G]}$ を言えばよいが，注意 2 により "$\leftarrow$" はよいので，"$\rightarrow$" を示す．κ は，M で (0): $\kappa \leqslant \omega$ であるか，(1): $\mathrm{Reg}(\kappa)$ であるか，(2): κ は極限基数であるか，のいずれかである．ただし，これらは排反ではない．(0) なら結果は明らか．そこで (1) と (2) で場合分け．(1): $\mathrm{Reg}(\kappa)^M$ のとき．$\kappa < \mathrm{o}(M) : \lim$，$\mathrm{cf}^M(\kappa) = \kappa$ であり，$\mathbb{P}$ が共終数を保つことから，$\mathrm{Reg}(\kappa)^M \iff \mathrm{cf}^M(\kappa) = \kappa \iff \mathrm{cf}^{M[G]}(\kappa) = \kappa \iff \mathrm{Reg}(\kappa)^{M[G]}$ となる．よって $\mathrm{Reg}(\kappa)^{M[G]}$ が従う．よって $\mathrm{Card}(\kappa)^{M[G]}$ を得る[*1]．(2): (κ が極限基数$)^M$ のとき．ZFC で "κ が極限基数ならば $\kappa = \sup\{\alpha < \kappa : \mathrm{Reg}(\alpha)\}$" が成り立つ[*2]ので，($\kappa$ が極限基数$)^M \Longrightarrow M \models \kappa = \bigcup\{\alpha < \kappa : \mathrm{Reg}(\alpha)\} \Longrightarrow M[G] \models \kappa = \bigcup\{\alpha < \kappa : \mathrm{Reg}(\alpha)\} \Longrightarrow \mathrm{Card}(\kappa)^{M[G]}$．2 つ目の含意は，(1) で指摘したように，この状況下で正則性が保たれる，つまり $\mathrm{Reg}(\alpha)^M \iff \mathrm{Reg}(\alpha)^{M[G]}$ であることによる．最後の含意は，$\mathrm{Reg}(\alpha)$ より $\mathrm{Card}(\alpha)$ であり，基数の集合の sup は再び基数になることによる． □

系 5. $\forall G\colon (M, \mathbb{P})\text{-generic}\ \forall \mathrm{limit}\,\beta < \mathrm{o}(M)\ \left[\beta > \omega \rightarrow \left(\mathrm{Reg}(\beta)^M \rightarrow \mathrm{Reg}(\beta)^{M[G]}\right)\right]$ ならば，$\mathbb{P}$ はすべての共終数とすべての基数を保つ．

定義 6. [*3][*4][*5]

(1) $\mathbb{P}$ が **λ-distributive** である

$$:\Longleftrightarrow\ \forall \delta < \lambda\ \ \forall \langle D_\xi : \xi < \delta \rangle : \text{family of dense open subset of } \mathbb{P}\ \left(\bigcap_{\xi < \delta} D_\xi\colon \text{dense open}\right). \tag{3}$$

(2) $\mathbb{P}$ が **λ-closed** である

$$:\Longleftrightarrow\ \forall \delta < \lambda\ \ \forall \langle p_\xi : \xi < \delta \rangle : \text{広義単調減少}\ \ \exists q \in \mathbb{P}\ \ \forall \xi < \delta\ (q \leqslant p_\xi). \tag{4}$$

□

補題 7. λ-closed ならば λ-distributive[*6].

[*1] ZFC で，"正則順序数は基数" が成り立つから，そのモデルである $M[G]$ でも成り立つ．

[*2] κ は極限基数なので，ある $\eta : \lim$ を用いて $\kappa = \bigcup_{\xi < \eta} \aleph_\xi$ と書ける．この η を固定せよ．$\beta \in \sup\{\alpha < \kappa : \mathrm{Reg}(\alpha)\}$ ならば，$\exists \alpha < \kappa\,(\beta \in \alpha \wedge \mathrm{Reg}(\alpha))$．$\mathrm{Reg}(\alpha)$ なので $\mathrm{Card}(\alpha)$ である．このことと $\alpha < \kappa$ より，ある $\xi < \eta$ が存在して $\alpha = \aleph_\xi$ と書ける．よって $\beta \in \kappa$ である．逆に $\beta \in \kappa$ とする．$\exists \xi < \eta\,(\beta \in \aleph_\xi)$ である．後続基数は正則なので，$\alpha = \aleph_{\zeta+1}$ を証拠に $\exists \alpha < \kappa\,(\beta \in \alpha \wedge \mathrm{Reg}(\alpha))$ となる．よって $\beta \in \sup\{\alpha < \kappa : \mathrm{Reg}(\alpha)\}$ を得る．

[*3] 文献によって，$\delta < \lambda$ だったり等号を含んで $\delta \leqslant \lambda$ だったりするので注意．ややこしや〜

[*4] 広義単調減少とは $\alpha < \beta \rightarrow p_\alpha \geqslant p_\beta$ のこと．

[*5] $D \subseteq \mathbb{P}$ が **open** とは，D が下に閉じていること．つまり $q \leqslant p \in D \rightarrow q \in D$ であること．

[*6] 逆は言えないらしい．[6] 問 6.16.

Proof. $\mathbb{P}$ を λ-closed な poset とする．λ-distributivity を示すために，$\delta<\lambda$ を固定し，$\mathbb{P}$ の dense open 部分集合族 $\langle D_\xi : \xi<\delta\rangle$ を任意に取る．$D := \bigcap_{\xi<\delta} D_\xi$ とする．Openness を示すために $q \leqslant p \in D$ とする．$\forall\xi<\delta\,(p\in D_\xi)$ であり，各 D_ξ は open なので，$\forall\xi<\delta\,(q\in D_\xi)$，つまり $q\in D$. Density を示すために $p\in\mathbb{P}$ を勝手に取る (want: $q\leqslant p$ なる $q\in D$ を見つける)．$\mathbb{P}$ の元の δ-列 $\langle p_\xi:\xi<\delta\rangle$ を，超限再帰によって次のように定める：$p_0 := p$, $\;p_{\xi+1}\leqslant p_\xi\,(p_{\xi+1}\in D_\xi)$, $\;$ for limit $\eta<\delta$, p_η is s.t. $\forall\xi<\eta\,(p_\eta\leqslant p_\xi)$．後続順序数の段でこのような $p_{\xi+1}$ が取れるのは D_ξ の density により，極限順序数の段でこのような p_η が取れるのは $\mathbb{P}$ が λ-closed であることによる．$\langle p_\xi:\xi<\delta\rangle$ が完成したら，再び λ-closedness を用いて $\forall\xi<\delta\,(q\leqslant p_\xi)$ となるように $q\in\mathbb{P}$ を取る．各 D_ξ の openness より $\forall\xi<\delta\,(q\in D_\xi)$ なので $q\in D$ である．$q\leqslant p$ は当然[*7]. □

例 8. $\mathrm{Reg}(\lambda)$ ならば，$\mathrm{Fn}_\lambda(I,J)$ は λ-closed．ゆえに λ-distributive.

Proof. 与えられた $\delta<\lambda$ および $\langle p_\xi:\xi<\delta\rangle$ に対し，$q:=\bigcup_{\xi<\delta}p_\xi$ とせよ．q は鎖 $p_0\subseteq p_1\subseteq p_2\subseteq\cdots$ の和なので，ちゃんと函数になっている．また，q は濃度 $<\lambda$ の集合の $<\lambda$ 個の和なので，λ の正則性より $|q|<\lambda$ となり，サイズも良い．$\forall\xi<\delta\,(q\supseteq p_\xi)$ は明らか. □

補題 9. $\omega<\lambda<\mathrm{o}(M)$ とする．

$$\forall\delta<\lambda\left({}^\delta\lambda\cap M[G]={}^\delta\lambda\cap M\right)\Longrightarrow\begin{cases}\forall\beta\leqslant\lambda\,\left(\mathrm{Card}(\beta)^M\leftrightarrow\mathrm{Card}(\beta)^{M[G]}\right)\\ \forall\,\mathrm{limit}\,\gamma\leqslant\lambda\,\left(\mathrm{cf}^M(\gamma)=\mathrm{cf}^{M[G]}(\gamma)\right).\end{cases}\tag{5}$$

Proof. まず上について．対偶を示す．

$$\begin{aligned}\neg\,\mathrm{Card}(\beta)^{M[G]}\quad&\Longleftrightarrow\;\exists\delta<\beta\,\exists f\in{}^\delta\lambda\cap M[G]\,(f\colon\delta\xrightarrow{\text{onto}}\beta)\\&\Longleftrightarrow\;\exists\delta<\beta\,\exists f\in{}^\delta\lambda\cap M\quad\;(f\colon\delta\xrightarrow{\text{onto}}\beta)\;\Longleftrightarrow\;\neg\,\mathrm{Card}(\beta)^M.\end{aligned}\tag{6}$$

下について，注意 2 より “$\geqslant$” は明らかなので “$\leqslant$” を示す．$\beta:=\mathrm{cf}^{M[G]}(\gamma)$ とおく (want: $\mathrm{cf}^M(\gamma)\leqslant\beta$).

$$\begin{aligned}&\mathrm{cf}^{M[G]}(\gamma)=\beta\;\Longrightarrow\;\mathrm{cf}^{M[G]}(\gamma)\leqslant\beta\\\Longrightarrow\;&\exists f\in{}^\delta\lambda\cap M[G]\,(f\colon\beta\to\gamma\wedge\sup(\mathrm{rng}\,f)=\gamma)\\\Longrightarrow\;&\exists f\in{}^\delta\lambda\cap M\quad\;(f\colon\beta\to\gamma\wedge\sup(\mathrm{rng}\,f)=\gamma)\Longrightarrow\;\mathrm{cf}^M(\gamma)\leqslant\beta.\end{aligned}\tag{7}$$

□

補題 10. $(\mathbb{P}$: λ-distributive$)^M$ かつ $A,E\in M$ かつ $(|A|=\delta<\lambda)^M$ ならば，${}^AE\cap M[G]={}^AE\cap M$.

Proof. まずは A が順序数 δ 自身である特別な場合について片付ける．仮定のもとで，$f\in{}^\delta E\cap M[G]\to f\in{}^\delta E\cap M$ を示せばよい (逆は明らか)．$f\in{}^\delta E\cap M[G]$ をとる．$M[G]\models f\colon\delta\to E$ なので，真理補題より，ある $p_0\in G$ が存在して $p_0\Vdash\mathring{f}\colon\check{\delta}\to\check{E}$ である．この $p_0\in G$ を固定する．各 $\xi<\delta$ に対し，

$$E_\xi:=\{q\leqslant p_0:\exists e\in E\,(q\Vdash\mathring{f}(\check{\xi})=\check{e})\},\quad D_\xi:=\{q\in\mathbb{P}:q\perp p_0\vee q\in E_\xi\}\tag{8}$$

と定める．定義可能性補題から $E_\xi,D_\xi\in M$ が従う．

[*7] 厳密には，δ が後続順序数のとき 1 だけズレる．例えば，$\delta=\omega+2$ のとき，この方法で列 $\langle p_\xi:\xi<\delta\rangle$ を作った後に勝手に q を選ぶと，$q\in D_{\omega+1}$ になってくれない．そのときは $D_{\delta-1}$ の density を用いて $q\in D_{\delta-1}$ となるように q を選ぶ必要がある．まあこんな細かいことは気にせんでもええか...

Claim 1. 各 $\xi < \delta$ について，$(E_\xi$ は dense open below $p_0)^M$．

$[\because]$ まず $\mathbf{V}$ で議論する[*8]．Density: $p \leqslant p_0$ を任意に取る．拡大補題により，$p \Vdash \mathring{f}\colon \check{\delta} \to \check{E}$ である．すなわち，$\forall G\colon (M, \mathbb{P})\text{-generic}\,(p \in G \to M[G] \models f\colon \delta \to E)$ である．いま，$\mathbf{V}$ で $\xi < \delta$ なので，絶対性より，どんな generic 拡大 $M[G]$ でも $M[G] \models \xi < \delta$ となる．これと合わせて $\forall G\colon (M, \mathbb{P})\text{-generic}\,(p \in G \to M[G] \models f\colon \delta \to E \wedge \xi < \delta)$ である．これより $\forall G\colon (M, \mathbb{P})\text{-generic}\,(p \in G \to M[G] \models \exists x \in E\,(f(\xi) = x))$ である．すなわち，$p \Vdash \exists x \in \check{E}\,(\mathring{f}(\check{\xi}) = x)$ が成り立つ．したがって[*9]，ある $q \leqslant p\,(q \in \mathbb{P})$ および $e \in E$ が存在して $q \Vdash \mathring{f}(\check{\xi}) = \check{e}$ が成り立つ．E_ξ の定義より $q \in E_\xi$ である．Openness: $q \leqslant p \in E_\xi$ とする．ある $e \in E$ が存在して $p \Vdash \mathring{f}(\check{\xi}) = \check{e}$ だが，この e を証拠に，拡大補題より $q \Vdash \mathring{f}(\check{\xi}) = \check{e}$ となるので $q \in E_\xi$ となりよい．(M に属する $\mathbb{P}$ の部分集合に関しては) density や openness は M に対して絶対的なので，M でも成り立つ． $\square$(Claim 1)

Claim 2. 各 $\xi < \delta$ について，$(D_\xi$ は dense open in $\mathbb{P})^M$．

$[\because]$ Density: $p \in \mathbb{P}$ を任意にとる．$p \perp p_0$ なら，この p を証拠に $p \leqslant p,\ p \in D_\xi$ となるのでよい．$p \not\perp p_0$ なら，$r \leqslant p, p_0$ なる $r \in \mathbb{P}$ がとれる．$r \leqslant p_0$ と E_ξ の p_0 以下の density より，ある $q \leqslant r$ が存在して $q \in E_\xi$ となる．この q を証拠に $q \leqslant p,\ q \in D_\xi$ となるのでよい．Openness: $q \leqslant p \in D_\xi$ とする．$p \perp p_0$ の場合，$q \perp p_0$ となる[*10]ので $q \in D_\xi$ である．$p \in E_\xi$ の場合，E_ξ の openness より $q \in E_\xi$，したがって $q \in D_\xi$ となるのでよい． $\square$(Claim 2)

$(\mathbb{P}\colon \lambda\text{-distributive})^M$ なので，$(D := \bigcup_{\xi<\delta} D_\xi$ は dense open in $\mathbb{P})^M$．したがって $\mathbf{V}$ でも D は dense open in $\mathbb{P}$ である．G の genericity より $G \cap D \neq \varnothing$ なので，元 $q \in G \cap D$ がとれる．q, p_0 は共に G の元なので，G の filter 性より $q \not\perp p_0$ である．したがって，$\forall \xi < \delta\,(q \in E_\xi)$ が成り立つ．この q について，$(\forall \xi < \delta\, \exists e \in E\,(q \Vdash \mathring{f}(\check{\xi}) = \check{e}))^M$ なので，M の AC を用いて，各 $\xi < \delta$ に対して存在が保証される e を e_ξ とせよ．$(\forall \xi < \delta\,(q \Vdash \mathring{f}(\check{\xi}) = \check{e_\xi}))^M$ である．$g := \{\langle \xi, e_\xi \rangle : \xi < \delta\}$ とせよ．つまり $g\colon \delta \to E,\ g(\xi) = e_\xi$ で g を定める．$g \in M$ である．$(M[G] \models)\ \forall \xi < \delta\,[\,f(\xi) = e_\xi = g(\xi)]$ なので $f = g$ である．$f = g \in M$ より $f \in M$ を得る．

一般の $A \in M$ について．$(|A| = \delta)^M$ なので，$j \in M,\ j\colon \delta \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} A$ が取れる．$f \circ j\colon \delta \to E$ に上の結果を適用すれば，$f \circ j \in M$ を得る．したがって[*11]，$f \in M$ である[*12]． $\square$

定理 11. $(\lambda \geqslant \aleph_0)^M,\ \mathrm{Reg}(\lambda)^M,\ (2^{<\lambda} = \lambda)^M,\ I, J \in M,\ (|J| \leqslant \lambda)^M,\ (\mathbb{P} := \mathrm{Fn}_\lambda(I, J))^M$ とする．このとき，$\mathbb{P}$ はすべての共終数とすべての基数を保つ．

[*8] 但し，$\mathbf{V}$ での $p \Vdash \varphi$ と，M でのそれは一般に異なる．以下で $p \Vdash \varphi$ と書いた場合，それは正確には $M \models$ “$p \Vdash \varphi$” のこと．

[*9] $\varphi(x) \equiv$ “$\mathring{f}(\check{\xi}) = x$” とおく．Rasiowa-Sikorski の補題を用いて，$p \in H$ なる $(M, \mathbb{P})$-generic filter H をとる．$p \Vdash \exists x\,(x \in \check{E} \wedge \varphi(x))$ なので，真理補題より $M[H] \models \exists x\,(x \in \check{E}_H \wedge \varphi(x))$ を得る．つまり，${}^{\exists}a \in M[H]\ (M[H] \models a \in \check{E}_H \wedge \varphi(a))$ である．$a \in \check{E}_H$ より，$a = \check{e}_H$ なる $\check{e} \in \mathrm{dom}(\check{E})$ が取れる．$\check{E}$ は標準 $\mathbb{P}$-name なので，その domain の要素も標準 $\mathbb{P}$-name であることに注意せよ．$e = \check{e}_H = a \in E$ である．$M[H] \models \varphi(\check{e}_H)$ なので，真理補題より，ある $r \in H$ が存在して $r \Vdash \varphi(\check{e})$ である．H の filter 性より $q \leqslant r, p$ なる $q \in H \subseteq \mathbb{P}$ が取れる．拡大補題より $q \Vdash \varphi(\check{e})$，つまり $q \Vdash \mathring{f}(\check{\xi}) = \check{e}$ である．これらの $q \leqslant p,\ e \in E$ が求めるものである．

[*10] もしも $q \not\perp p_0$ なら，ある $r \leqslant q, p_0$ が存在する．$r \leqslant q \leqslant p$ より $r \leqslant p$ なので，$r \leqslant p_0$ と合わせて $p \not\perp p_0$ となってしまい矛盾．

[*11] $j = \{\langle \xi, a_\xi \rangle : \xi < \delta\} \in M,\ f \circ j = \{\langle \xi, e_\xi \rangle : \xi < \delta\} \in M$ とすれば，$f = \{\langle a_\xi, e_\xi \rangle : \exists \xi < \delta\,(\langle \xi, a_\xi \rangle \in j \wedge \langle \xi, e_\xi \rangle \in f \circ j)\}$ となり $f \in M$ を得る．

[*12] 更に，この補題の結果は “${}^{A}M \cap M[G] = {}^{A}M \cap M$” に強められる．というのも，$f \in M[G],\ f\colon A \to M$ が与えられたとする．M にとっては，この f が函数かどうかは分からないが，クラス函数になっていることは分かる．そこで M の置換公理によって $f\colon A \to X,\ \mathrm{rng}(f) \subseteq X$ なる $X \in M$ が取れる．この X を E とすればよい．

Proof. 系 5 によれば，$\forall G$: $(M,\mathbb{P})$-generic $\forall \operatorname{limit} \beta < \mathrm{o}(M)$ $\left[\beta > \omega \to \left(\mathrm{Reg}(\beta)^M \to \mathrm{Reg}(\beta)^{M[G]}\right)\right]$ を示せば十分である．そこで，$(M,\mathbb{P})$-generic な G，および，$\omega < \beta < \mathrm{o}(M) \wedge \mathrm{Reg}(\beta)^M$ なる β を固定する．(1): $\omega < \beta \leqslant \lambda$ であるか (2) $\lambda < \beta < \mathrm{o}(M)$ であるかで場合分け．(1) のとき．$\mathrm{Reg}(\lambda)^M$ なので，例 8 と補題 7 により $(\mathbb{P}$: λ-distributive$)^M$ が従う．補題 10 によって $\forall \delta < \lambda\, ({}^{\delta}\lambda \cap M[G] = {}^{\delta}\lambda \cap M)$ が成り立つので，補題 9 によって $\forall \gamma \leqslant \lambda$: $\lim \left(\mathrm{cf}^M(\gamma) = \mathrm{cf}^{M[G]}(\gamma)\right)$ がいえる．$\gamma = \beta$ とすれば，$\mathrm{Reg}(\beta)^M \Longrightarrow \mathrm{cf}^M(\beta) = \beta \Longrightarrow \mathrm{cf}^{M[G]}(\beta) = \beta \Longrightarrow \mathrm{Reg}(\beta)^{M[G]}$ となるのでよい．(2) の場合，$(\mathrm{Reg}(\lambda)\ \&\ |J| \leqslant \lambda = 2^{<\lambda}\ \&\ (2^{<\lambda})^+ = \lambda^+)$ なので，「集合論ノート 0012」の主定理より λ^+ 以上の共終数と基数を保つ．λ, β が基数で $\lambda < \beta$ なので $\lambda^+ \leqslant \beta$ となり，$\mathrm{Reg}(\beta)^M$ から $\mathrm{Reg}(\beta)^{M[G]}$ が従う． □

参考文献

本稿では，主に [5], Ch.IV, §7 と [6], Ch.6 §2，および [9], Ch. 12 を参考にしました．対応する定理番号の明記は行っていません．

[1] Devlin, K., *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory* (2nd ed.), Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1993.

[2] Jech, T., *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2002.

[3] Kunen, K., *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, Vol. 102. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1980. 邦訳 [13].

[4] Kunen, K., *The Foundations of Mathematics*, Vol. 19. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2009. 邦訳 [14].

[5] Kunen, K., *Set Theory* (rev. ed.), Vol. 34. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.

[6] Schindler, R., *Set Theory, Exploring Independence and Truth*, Universitext, Springer, 2014.

[7] Shoenfield. J.R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

[8] Takeuti, G. and Zaring, W.M., *Introduction to Axiomatic Set Theory* (2nd ed.), Vol. 1. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1982.

[9] Weaver, N., *Forcing for Mathematicians*, World Scientific Publishing, 2014.

[10] 新井敏康, 数学基礎論, 岩波書店, 2011.

[11] 菊池誠, 不完全性定理, 共立出版, 2014.

[12] 倉田令二朗・篠田寿一, 公理論的集合論, 倉田令二郎監修・数学基礎論シリーズ 2 巻, 河合文化教育研究所, 1996.

[13] K. キューネン（藤田博司訳）, 集合論–独立性証明への案内, 日本評論社, 2008. [3] の邦訳.

[14] K. キューネン（藤田博司訳）, キューネン数学基礎論講義, 日本評論社, 2016. [4] の邦訳.

[15] 田中一之編・著, 数学基礎論講義, 日本評論社, 1997.

[16] 田中一之編, ゲーデルと 20 世紀の論理学 4 集合論とプラトニズム, 東京大学出版会, 2007.

[17] 田中一之・鈴木登志雄, 数学のロジックと集合論, 培風館, 2003.

[18] 田中尚夫, 公理的集合論, 現代数学レクチャーズ (B-10), 培風館, 1982.

[19] 田中尚夫, 選択公理と数学–発生と論争、そして確立への道 (増訂版), 遊星社, 2005.