集合論ノート 0013　Nice name.

近藤友祐 (@elecello_)

初稿: 2018/10/07　修正: 2018/10/15
この文書の場所：　https://elecello.com/works.html

本稿では，特に断りの無い場合，M は ZFC の ctm，$\mathbb{P}$ は poset とし，$\mathbb{P} \in M$ を仮定する．

定義 1. $\tau \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ とする．$\vartheta \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ が τ の**部分集合に対する nice name** であるとは，ϑ が

$$\vartheta = \bigsqcup_{\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)} \Big(\{\sigma\} \times A_\sigma \Big) \qquad \text{where 各 } A_\sigma \text{ は } \mathbb{P} \text{ の反鎖} \tag{1}$$

の形をしていることをいう．ただし，各 $\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)$ について，ただ一つの A_σ が対応していると考える．□

注意 2. ϑ が「τ の部分集合に対する nice name」であっても，$\vartheta_G \subseteq \tau_G$ とは限らない．例えば，$\tau = \{\langle \mu, q \rangle\} = \{\mu\} \times \{q\}$，$\vartheta = \bigcup_{\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)} (\{\sigma\} \times A_\sigma) = \{\mu\} \times A_\mu$ で $A_\mu = \{r\}$ のときとか．但し $r \in G$，$q \notin G$ とする．このとき，$\{\mu_G\} = \vartheta_G \not\subseteq \tau_G = \varnothing$ となる．□

補題 3. $\mathbb{P} \in M$，$\tau, \mu \in M^{\mathbb{P}}$ とする．このとき，τ の部分集合に対する nice name ϑ で，

$$\mathbb{1} \Vdash \mu \subseteq \tau \rightarrow \mu = \vartheta \tag{2}$$

なるものが存在する．すなわち，どんな集合のどんな部分集合に対しても nice name がつけられる．

Proof. 各 $\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)$ に対し，$A_\sigma \subseteq \mathbb{P}$ を (i) A_σ は $\mathbb{P}$ の反鎖，(ii) $\forall p \in A_\sigma\,(p \Vdash \sigma \in \mu)$，(iii) A_σ は (i)(ii) のようなもののうち $\mathcal{P}(\mathbb{P})$ で極大，となるように作る．

Claim 1. これは可能．
[$\because$] $\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)$ を固定せよ．まず，$B_\sigma := \{p \in \mathbb{P} : p \Vdash \sigma \in \mu\}$ と定める．定義可能性補題より $B_\sigma \in M$ である．$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(B_\sigma) : A \text{ は } \mathbb{P} \text{ の反鎖 }\}$ と定める．$\varnothing \in \mathcal{A}$ なので $\mathcal{A} \neq \varnothing$ である．$\mathcal{A}$ が $\subseteq$ に関する極大元をもつことを示す．そのために鎖 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ を勝手に取る．$\mathcal{C}$ が $\mathcal{A}$ に上限を持つことを示す．それは $A^* := \bigcup \mathcal{C}$ である．何となれば，まず $A^* \in \mathcal{A}$ を示す．$A^* \subseteq B_\sigma$ は明らか[*1]．A^* が $\mathbb{P}$ における反鎖であることを示すために $p, q \in A^*\,(p \neq q)$ を勝手に取る．A^* の定義より，ある $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ が存在して $p \in A_1$, $q \in A_2$．$\mathcal{C}$ の全順序性を用いて $A_0 := \max\{A_1, A_2\}$ とすれば，$p, q \in A_0\,(= A_1 \text{ or } A_2)$ である．A_0 は $\mathbb{P}$ における反鎖なので $p \perp q$ を得る．$A \in \mathcal{C} \Longrightarrow A \subseteq A^*$ なので上限性は明らか．以上より，$\mathcal{A}$ の任意の鎖が $\mathcal{A}$ に上限を持つことがわかった．よって M の Zorn の補題より $\mathcal{A}$ は極大元をもつ．それを $A_\sigma\,(\in \mathcal{A})$ とせよ．これが所望のものである．というのも，(i) は $A_\sigma \in \mathcal{A}$ から明らか．(ii) については $A_\sigma \subseteq B_\sigma$

[*1] $x \in \mathcal{A}^* = \bigcup \mathcal{C}$ なら，ある $A \in \mathcal{C}\,(\subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(B_\sigma))$ が存在して $x \in A$．$A \in \mathcal{P}(B_\sigma)$ より $A \subseteq B_\sigma$．$x \in A \subseteq B_\sigma$ より $x \in B_\sigma$．

であり，B_σ の任意の元は $\sigma \in \mu$ を force するのでよい．(iii) は，もし $A_\sigma^+ := A_\sigma \cup \{q\}\,(q \in \mathbb{P})$ が A_σ の真の拡大であって (i)(ii) を満たすなら，(ii) より $A_\sigma^+ \subseteq B_\sigma$ であることと (i) を合わせて $A_\sigma^+ \in \mathcal{A}$ である．すると $A_\sigma \subsetneqq A_\sigma^+$ で，これは A_σ の $\mathcal{A}$ における極大性に矛盾． □(Claim 1)

これらの A_σ $(\sigma \in \mathrm{dom}(\tau))$ を用いて，求める ϑ は

$$\vartheta = \bigsqcup_{\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)} \Big(\{\sigma\} \times A_\sigma\Big) \tag{3}$$

で表される．これを見よう．示すべき式 $\mathbb{1} \Vdash \mu \subseteq \tau \to \mu = \vartheta$ は，$\Vdash$ の定義により，「$\mathbb{1}$ を含む任意の generic filter G による generic 拡大 $M[G]$ でコレコレが成り立つ」と同値である．$\mathbb{1} \in G$ は常に満たされるので，結局，任意の generic 拡大 $M[G]$ でコレコレが成り立つことをいえばよい．$M[G]$ を任意の generic 拡大として，$M[G] \models \mu_G \subseteq \tau_G$ を仮定する (want: $M[G] \models \mu_G = \vartheta_G$).

$\boxed{\mu_G \supseteq \vartheta_G}$ $a \in \vartheta_G$ を勝手に取る．$(\cdot)_G$ の定義より，ある $\langle \sigma, p\rangle \in \vartheta$ が存在して $a = \sigma_G$, $p \in G$ が成り立つ．ϑ の定義より $\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)$, $p \in A_\sigma$ である．$\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)$ に対する A_σ の定義の (ii) の条項により，$p \Vdash \sigma \in \mu$ を得る．$p \in G$ と真理補題より $\sigma_G \in \mu_G$，すなわち $a \in \mu_G$ を得る．

$\boxed{\mu_G \subseteq \vartheta_G}$ $a \in \mu_G$ を勝手に取る．仮定 $\mu_G \subseteq \tau_G$ と合わせて $a \in \tau_G$ である．したがって，ある $\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)$ が存在して $a = \sigma_G$ である．この $\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)$ を固定する．poset に関する一般的事実[*2]より，(A) $G \cap A_\sigma \neq \varnothing$ であるか，(B) $\exists q \in G\, \forall p \in A_\sigma\, (q \perp p)$ である．(B) の場合．この $q \in G$ を固定する．$a = \sigma_G \in \mu_G$ なので，真理補題より，$r \Vdash \sigma \in \mu$ なる $r \in G$ がとれる．G の filter 性より，$s \leqslant q, r$ なる $s \in G$ がとれる．拡大補題より $s \Vdash \sigma \in \mu$ である $\cdots(**)$．いま $A_\sigma \cap G = \varnothing$ なので，$A_\sigma^+ := A_\sigma \cup \{s\}$ は A_σ の真の拡大となっている．(i) A_σ^+ は $\mathbb{P}$ の反鎖である：$p \in A_\sigma$ たちは incompatible なので，s と $p \in A_\sigma$ が incompatible であることを確かめればよい．もしも共通拡大 $\mathbb{P} \ni t \leqslant s, p$ があれば $t \leqslant s \leqslant q$ と合わせて $q \not\perp p$ となるが，これは (B) に反する．(ii) $\forall t \in A_\sigma^+, (t \Vdash \sigma \in \mu)$：$A_\sigma$ の元についてはよいので $t = s$ のときを調べればよいが，これは $(**)$．以上より A_σ^+ は A_σ の真の拡大で (i)(ii) を満たすので，これは A_σ の極大性に反する．よって (B) は起こり得ない．したがって (A) である．このとき元 $p \in G \cap A_\sigma$ が取れる．$\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)$ に注意すれば $\langle \sigma, p\rangle \in \{\sigma\} \times A_\sigma \subseteq \vartheta$ となり，$\langle \sigma, p\rangle \in \vartheta$ である．$p \in G$ なので $\sigma_G \in \vartheta_G$ となり，$\sigma_G = a$ だったので $a \in \vartheta_G$ を得る． □

補題 4. $\tau \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ を固定し，$\kappa := |\mathbb{P}|$, $\lambda := |\mathrm{dom}(\tau)|$, $\mathbb{P}$: θ^+-cc, $\kappa, \lambda, \theta \geqslant \aleph_0$ とする．このとき，τ の部分集合に対する nice name は $\kappa^{\lambda \cdot \theta}$ 個以下しか存在しない．

Proof. まず $\theta < \kappa$ の場合．$\aleph_0 \leqslant \theta^+ \leqslant \kappa$ なので [5] Lemma I.13.19 の諸公式が使える．θ^+-cc より，反鎖は $|[\kappa]^{<\theta^+}| = |\kappa|^{<\theta^+} = |\kappa|^\theta = \kappa^\theta$ 個以下しかない．nice name を一つ定めるには，各 $\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)$ のそれぞれについて反鎖を選べばよい．よって nice name の総数は函数 $\mathrm{dom}(\tau) \to (\mathbb{P}$ の反鎖たち$)$ の総数のことだから，$(\kappa^\theta)^\lambda = \kappa^{\lambda \cdot \theta}$ 個以下．$\theta \geqslant \kappa$ の場合．θ^+-cc より，反鎖は $|[\kappa]^{<\theta^+}| = |[\kappa]^{\leqslant\theta}| = |[\kappa]^{\leqslant\kappa}| = |\mathcal{P}(\kappa)| = 2^\kappa$ 個以下なので，nice name の総数は $(2^\kappa)^\lambda$ 個以下である．$(2^\kappa)^\lambda \leqslant (2^\theta)^\lambda \leqslant (\kappa^\theta)^\lambda$ なので，これは $\kappa^{\lambda \cdot \theta}$ 個以下でもある． □

[*2] M が ZFC の推移的モデルで $\mathbb{P} \in M$, $E \subseteq \mathbb{P}$, $E \in M$, G: $(M, \mathbb{P})$-generic ならば，(A) $G \cap E \neq \varnothing$，または，(B) $\exists q \in G\, \forall p \in E\, (q \perp p)$ である．証明は集合論ノート 0010 を参照．

参考文献

本稿では，主に [5], Ch.IV, §3 を参考にしました．対応する定理番号の明記は行っていません．

[1] Devlin, K., *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory* (2nd ed.), Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1993.

[2] Jech, T., *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2002.

[3] Kunen, K., *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, Vol. 102. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1980. 邦訳 [13].

[4] Kunen, K., *The Foundations of Mathematics*, Vol. 19. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2009. 邦訳 [14].

[5] Kunen, K., *Set Theory* (rev. ed.), Vol. 34. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.

[6] Schindler, R., *Set Theory, Exploring Independence and Truth*, Universitext, Springer, 2014.

[7] Shoenfield. J.R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

[8] Takeuti, G. and Zaring, W.M., *Introduction to Axiomatic Set Theory* (2nd ed.), Vol. 1. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1982.

[9] Weaver, N., *Forcing for Mathematicians*, World Scientific Publishing, 2014.

[10] 新井敏康, 数学基礎論, 岩波書店, 2011.

[11] 菊池誠, 不完全性定理, 共立出版, 2014.

[12] 倉田令二朗・篠田寿一, 公理論的集合論, 倉田令二郎監修・数学基礎論シリーズ 2 巻, 河合文化教育研究所, 1996.

[13] K. キューネン（藤田博司訳）, 集合論–独立性証明への案内, 日本評論社, 2008. [3] の邦訳.

[14] K. キューネン（藤田博司訳）, キューネン数学基礎論講義, 日本評論社, 2016. [4] の邦訳.

[15] 田中一之編・著, 数学基礎論講義, 日本評論社, 1997.

[16] 田中一之編, ゲーデルと 20 世紀の論理学 4 集合論とプラトニズム, 東京大学出版会, 2007.

[17] 田中一之・鈴木登志雄, 数学のロジックと集合論, 培風館, 2003.

[18] 田中尚夫, 公理的集合論, 現代数学レクチャーズ (B-10), 培風館, 1982.

[19] 田中尚夫, 選択公理と数学–発生と論争、そして確立への道 (増訂版), 遊星社, 2005.