集合論ノート 0012
θ-cc poset と θ 以上の基数の保存，ccc poset と基数の保存

近藤友祐 (@elecello_)

初稿: 2018/09/26　修正: 2018/10/08
この文書の場所：　https://elecello.com/works.html

本稿では，特に断りの無い場合，M は ZFC の ctm，$\mathbb{P}$ は poset とし，$\mathbb{P} \in M$ を仮定する．

定義 1. $\mathrm{Card}(\theta)^M$ なる θ に関して，

(1) **$\mathbb{P}$ が θ 以上の基数を保つ**

$$:\Longleftrightarrow \ \forall G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic}\,\forall \beta < \mathrm{o}(M)\ \left[\beta \geqslant \theta \to \left(\mathrm{Card}(\beta)^M \leftrightarrow \mathrm{Card}(\beta)^{M[G]}\right)\right]. \tag{1}$$

(2) **$\mathbb{P}$ が θ 以上の共終数を保つ**

$$:\Longleftrightarrow \ \forall G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic}\,\forall\,\mathrm{limit}\,\gamma < \mathrm{o}(M)\ \left[\mathrm{cf}^M(\gamma) \geqslant \theta \to \left(\mathrm{cf}^M(\gamma) = \mathrm{cf}^{M[G]}(\gamma)\right)\right]. \tag{2}$$

また，$\theta = \aleph_1$ のときは「θ 以上の」を省略する． □

注意 2. 式 (1) の "$\leftarrow$" は常に成り立つ．なぜならば，$\mathrm{Card}(\cdot)$ は Π_1 論理式であるから，下向き ($M[G]$ から M) に相対化するため．また，式 (2) の "$\geqslant$" は常に成り立つ．なぜならば，$\subseteq, \sup, \mathrm{type}$ の M や $M[G]$ に対する絶対性より，$\mathrm{cf}^M(\gamma) = \min\{\mathrm{type}(X) : X \subseteq \gamma \wedge \sup X = \gamma \wedge X \in M\}$，$\mathrm{cf}^{M[G]}(\gamma) = \min\{\mathrm{type}(X) : X \subseteq \gamma \wedge \sup X = \gamma \wedge X \in M[G]\}$ であるが，M から $M[G]$ へと X の捜索範囲が広がった分，最小値としては落ちるため． □

補題 3. $\mathrm{Card}(\theta)^M$ を仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\text{ が }\theta\text{ 以上の共終数を保つ}\\ \Longleftrightarrow\ &\forall G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic}\ \forall\,\mathrm{limit}\,\beta\ \left[\theta \leqslant \beta < \mathrm{o}(M) \to \left(\mathrm{Reg}(\beta)^M \to \mathrm{Reg}(\beta)^{M[G]}\right)\right].\end{aligned} \tag{3}$$

Proof. $\boxed{(\Longrightarrow)}$ 右辺を示すために，$(M,\mathbb{P})$-generic filter G，$\beta : \lim$ で $\theta \leqslant \beta < \mathrm{o}(M)$ なるものを取り，$\mathrm{Reg}(\beta)^M$ を仮定せよ．$\mathrm{Reg}(\beta)^M$ より $\mathrm{cf}^M(\beta) = \beta$ である．今，$\beta < \mathrm{o}(M) : \lim$，$\mathrm{cf}^M(\beta) = \beta \geqslant \theta$ であり，$\mathbb{P}$ は θ 以上の共終数を保つので，$\mathrm{cf}^M(\beta) = \mathrm{cf}^{M[G]}(\beta)$ を得る．したがって $\mathrm{cf}^{M[G]}(\beta) = \beta$，つまり $\mathrm{Reg}(\beta)^{M[G]}$ である．

$\boxed{(\Longleftarrow)}$ 左辺を示すために，$(M,\mathbb{P})$-generic filter G，$\gamma < \mathrm{o}(M) : \lim$ で，$\mathrm{cf}^M(\gamma) \geqslant \theta$ なるものを固定せよ．$\beta := \mathrm{cf}^M(\gamma)$ とする (want: $\beta = \mathrm{cf}^{M[G]}(\gamma)$)．共終数を取ると値が落ちるので $\beta \leqslant \gamma < \mathrm{o}(M)$ である．$\beta < \theta$ であれば，$\mathrm{cf}^M(\gamma) = \beta < \theta \leqslant \mathrm{cf}^M(\gamma)$ となり矛盾するので，これは起こり得ない．そこで $\beta \geqslant \theta$ の場合を考える．極限順序数の共終数は正則なので，$\mathrm{Reg}(\beta)^M$ である．$\theta \leqslant \beta < \mathrm{o}(M)$ と合

わせて，仮定から $\mathrm{Reg}(\beta)^{M[G]}$ を得る．すなわち，$\mathrm{cf}^{M[G]}(\beta) = \beta$ である．さて，$\beta = \mathrm{cf}^M(\gamma)$ であるから $M \models \exists X\,(X \subseteq \gamma \wedge \sup X = \gamma \wedge \mathrm{type}(X) = \beta)$ が成り立っている．このような $X \in M$ を固定する．$\subseteq, \sup, \mathrm{type}$ の M に対する絶対性より，$X \subseteq \gamma \wedge \sup X = \gamma \wedge \mathrm{type}(X) = \beta$ が成り立つ．ZFC で「$Y \subseteq \delta : \lim \wedge \sup Y = \delta \Longrightarrow \mathrm{cf}(\delta) = \mathrm{cf}(\mathrm{type}\, Y)$」が成り立つ．そこで Y, δ として $X, \gamma \in M[G]$ を取れば，$M[G] \models \mathrm{ZFC}$ や type の絶対性などに注意して $\mathrm{cf}^{M[G]}(\gamma) = \mathrm{cf}^{M[G]}(\mathrm{type}\, X) = \mathrm{cf}^{M[G]}(\beta) = \beta$ となるのでよい． $\square$

補題 4. $\mathrm{Reg}(\theta)^M$ とする．このとき，$\mathbb{P}$ が θ 以上の共終数を保つならば，$\mathbb{P}$ は θ 以上の基数を保つ．

Proof. $G \colon (M, \mathbb{P})$-generic，および $\kappa < \mathrm{o}(M)$ で $\kappa \geqslant \theta$ なるものを取り固定する．$\mathrm{Card}(\kappa)^M \leftrightarrow \mathrm{Card}(\kappa)^{M[G]}$ を言えばよいが，注意 2 により "$\leftarrow$" はよいので，"$\rightarrow$" を示す．κ は，M で (1): $\mathrm{Reg}(\kappa)$ であるか，(2): κ は極限基数であるかのいずれかである．ただし，(1) と (2) が同時に満たされることもありうる．(1) と (2) で場合分け．(1): $\mathrm{Reg}(\kappa)^M$ のとき．$\kappa < \mathrm{o}(M) : \lim$，$\mathrm{cf}^M(\kappa) = \kappa \geqslant \theta$ であり，$\mathbb{P}$ が θ 以上の共終数を保つことから，$\mathrm{Reg}(\kappa)^M \iff \mathrm{cf}^M(\kappa) = \kappa \iff \mathrm{cf}^{M[G]}(\kappa) = \kappa \iff \mathrm{Reg}(\kappa)^{M[G]}$ であることに留意せよ．ZFC で「$\mathrm{Reg}(\kappa) \rightarrow \mathrm{Card}(\kappa)$」が成り立つので，そのモデルである $M[G]$ でも成り立つ．よって $\mathrm{Reg}(\kappa)^{M[G]}$ から $\mathrm{Card}(\kappa)^{M[G]}$ を得る．(2): $(\kappa \geqslant \theta$ が極限基数$)^M$ のとき．$\kappa = \theta$ であれば，$\mathrm{Reg}(\theta)^M$ との仮定および (1) の結果より $\mathrm{Card}(\theta)^{M[G]}$ を得るのでよい．そこで $\kappa > \theta$ のときを考える．ZFC で「$\kappa > \theta$ が極限基数ならば $\kappa = \sup\{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) \geqslant \theta \wedge \mathrm{Reg}(\alpha)\}$」が成り立つ[*1]ので，$(\kappa$ が極限基数$)^M \Longrightarrow M \models \kappa = \bigcup\{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) \geqslant \theta \wedge \mathrm{Reg}(\alpha)\} \Longrightarrow M[G] \models \kappa = \bigcup\{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) \geqslant \theta \wedge \mathrm{Reg}(\alpha)\} \Longrightarrow \mathrm{Card}(\kappa)^{M[G]}$．2 つ目の含意は，共終数の保存の仮定，および，先ほど指摘したように，この状況下で正則性が保たれる，つまり $\mathrm{Reg}(\alpha)^M \iff \mathrm{Reg}(\alpha)^{M[G]}$ であることによる．最後の含意は，$\mathrm{Reg}(\alpha)$ より $\mathrm{Card}(\alpha)$ であり，基数の集合の sup は再び基数になることによる． $\square$

補題 5 (θ-**Global Covering Property?**).

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P} \in M \\ G \colon (M, \mathbb{P})\text{-generic} \\ (\theta \text{ は非可算基数})^M \\ (\mathbb{P} \text{ は } \theta\text{-cc をもつ})^M \\ A, B \in M \\ f \colon A \to B \\ f \in M[G] \end{array}\right. \Longrightarrow \exists F \colon A \to \mathcal{P}(B) \text{ s.t.} \left\{\begin{array}{l} F \in M \\ \forall a \in A\,(f(a) \in F(a)) \\ \forall a \in A\,(|F(a)| < \theta)^M. \end{array}\right. \tag{4}$$

補題のお気持ちは図 1 の通り．

Proof. $f \in M[G]$ より，$\mathring{f} \in M^{\mathbb{P}}$ で $\mathring{f}_G = f$ なるものがとれる．$M[G] \models$ "$\mathring{f}_G \colon \check{A}_G \to \check{B}_G$" なので，真理補題より，ある $p \in G$ が存在して $p \Vdash$ "$\mathring{f} \colon \check{A} \to \check{B}$"．この p を固定する．各 $a \in A$ に対して $F(a) := \left\{b \in B : \exists q \leqslant p \left(q \Vdash \text{“}\mathring{f}(\check{a}) = \check{b}\text{”}\right)\right\}$ $(\in \mathcal{P}(B))$ と定めよ (お気持ち：「M から見た，$f(a)$ として可能な値 b」を，とりあえず全部集めてくる)．定義可能性補題より $F \in M$ である．この F が所望のものであることを見る．

[*1] κ は極限基数なので，ある $\eta : \lim$ を用いて $\kappa = \bigcup_{\xi < \eta} \aleph_\xi$ と書ける．この η を固定せよ．$\beta \in \sup\{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) \geqslant \theta \wedge \mathrm{Reg}(\alpha)\}$ ならば，$\exists \alpha < \kappa\,(\beta \in \alpha \wedge \mathrm{cf}(\alpha) = \alpha \geqslant \theta \wedge \mathrm{Reg}(\alpha))$．$\mathrm{Reg}(\alpha)$ なので $\mathrm{Card}(\alpha)$ である．このことと $\alpha < \kappa$ より，ある $\xi < \eta$ が存在して $\alpha = \aleph_\xi$ と書ける．よって $\beta \in \kappa$ である．逆に $\beta \in \kappa$ とする．$\exists \xi < \eta\,(\beta \in \aleph_\xi)$ である．$\theta < \kappa$ に留意すれば，$\max\{\theta, \aleph_\xi\}$ を $\aleph_\zeta$ $(\zeta < \eta)$ の形に書ける．κ は極限基数なので $\beta \in \aleph_{\zeta+1} < \kappa$ $(\zeta + 1 < \eta)$ となる．$\alpha = \aleph_{\zeta+1}$ を証拠に $\exists \alpha < \kappa\,(\beta \in \alpha \wedge \mathrm{Reg}(\alpha) \wedge \mathrm{cf}(\alpha) = \alpha \geqslant \theta)$ となるので，$\beta \in \sup\{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) \geqslant \theta \wedge \mathrm{Reg}(\alpha)\}$ を得る．

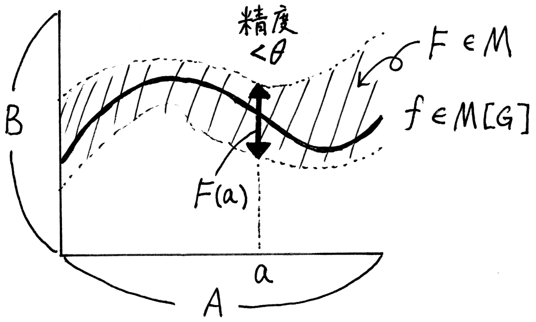

図 1　M は，$M[G]$ の函数を精度 $<\theta$ で近似できる

$\boxed{\forall a \in A\,(f(a) \in F(a))}$ $a \in A$ を勝手に取り固定せよ．$b := f(a)$ とせよ (want: $b \in F(a)$)．$M[G] \models$ "$\check{b}_G = \mathring{f}_G(\check{a}_G)$" である．真理補題により，$r \Vdash$ "$\check{b} = \mathring{f}(\check{a})$" なる $r \in G$ が存在する．G の filter 性より $q \leqslant p, r$ なる $q \in G$ が存在するが，この $q \leqslant p$ について，拡大補題より $q \Vdash$ "$\check{b} = \mathring{f}(\check{a})$" である．$q \leqslant p$ と合わせて，$F(a)$ の定義から $b \in F(a)$ を得る．

$\boxed{\forall a \in A\,(|F(a)| < \theta)^M}$ $a \in A$ を固定せよ．各 $b \in F(a)$ ごとに存在が保証される $q \leqslant p$ のうちのひとつを選び, q_b とせよ (M の AC を使っている．お気持ち:「q_b は, $f(a) = b$ の証人」)．函数 $g_a\colon F(a) \to \mathbb{P}$, $g_a(b) := q_b$ は，定義可能性補題より，M の元であることに注意せよ．

> **Claim 1.** $\forall b, c \in F(a)\,(b \neq c \to q_b \perp q_c)$.
>
> [$\because$] 背理法．$q_b \not\perp q_c$ なる $b, c \in F(a)$, $b \neq c$ が存在したとする．このとき $\exists r \leqslant q_b, q_c\,(r \leqslant q_b, q_c)$ であるから，この r について，$F(a)$ の定義と拡大補題から $r \Vdash$ "$\mathring{f}(\check{a}) = \check{b}$" & $r \Vdash$ "$\mathring{f}(\check{a}) = \check{c}$" である．よって，$r \Vdash$ "$\mathring{f}(\check{a}) = \check{b} \wedge \mathring{f}(\check{a}) = \check{c}$"，したがって $r \Vdash$ "$\check{b} = \check{c}$"．Rasiowa-Sikorski の補題より，r を元として含む $(M, \mathbb{P})$-generic filter H が存在する．真理補題より $M[H] \models$ "$\check{b}_G = \check{c}_G$"，したがって $b = c$ となるが，これは b, c の取り方に矛盾する．　$\square$(Claim 1)

以上の考察より，$M \models$ "$\{g_a(b)\ (= q_b) \in \mathbb{P} : b \in F(a)\}$ は $\mathbb{P}$ の反鎖" が従う．$M \models$ "$\mathbb{P}$ は θ-cc をもつ" と合わせて，$M \models$ "$|\{g_a(b) \in \mathbb{P} : b \in F(a)\}| < \theta$" である．したがって[*2]，$(|F(a)| < \theta)^M$ である．　$\square$

補題 6. (θ は非可算正則基数 $\wedge$ $\mathbb{P}$ は θ-cc をもつ$)^M$ ならば，$\mathbb{P}$ は θ 以上の共終数と θ 以上の基数を保つ．

Proof. 補題 4 によれば，$\mathbb{P}$ が θ 以上の共終数を保つことを示せば十分である．さらに，そのためには式 (3) の右辺を示せば十分である．G: $(M, \mathbb{P})$-generic，β : lim で $\theta \leqslant \beta < \mathrm{o}(M)$ なるものを固定する．対偶 $\neg\,\mathrm{Reg}(\beta)^{M[G]} \to \neg\,\mathrm{Reg}(\beta)^M$ を示す．$\neg\,\mathrm{Reg}(\beta)^{M[G]}$ を仮定する (want: $\neg\,\mathrm{Reg}(\beta)^M$)．$\alpha := \mathrm{cf}^{M[G]}(\beta) < \beta$ と定める．共終数の定義より $M[G] \models \exists X\,(X \subseteq \beta \wedge \sup X = \beta \wedge \mathrm{type}(X) = \alpha)$ である．このような $X \in M[G]$ を固定せよ．$\mathrm{type}(X) = \alpha$ の証拠となる唯一の順序同型 $f\colon \langle \alpha, \in \rangle \cong \langle X, \in \rangle$ をとる．type の絶対性より $f \in M[G]$ である．$X \subseteq \beta$ なので $f\colon \alpha \to \beta$ でもある．補題 5 により，$F\colon \alpha \to \mathcal{P}(\beta)$ で $F \in M$, $\forall \xi < \alpha\,[(f(\xi) \in F(\xi)) \wedge (|F(\xi)| < \theta)^M]$ なるものを得る．$Y := \bigcup_{\xi<\alpha} F(\xi)$ $(\subseteq \beta)$ と定める．$Y \in M$ である．X の任意の元は $f(\xi)$ の形をしていて，それは $\in F(\xi)$ $(\subseteq Y)$ であるから，$X \subseteq Y$ で

[*2] $M \models$ "g_a は単射" を言う必要がある．M で議論する．$b \neq c$ かつ $g_a(b) = g_a(c)$ から矛盾させる．$g_a(b) = g_a(c)$ とは $q_b = q_c$ のことなので，$q_b \not\perp q_c$．これは $\{q_b \in \mathbb{P} : b \in F(a)\}$ が反鎖であることに矛盾．

ある．よって $\sup X \leqslant \sup Y$ である．$Y \subseteq \beta$ で $\sup X = \beta$ だったので，$\sup Y = \beta$ である．今，仮定より (β は非可算正則基数)^M である．このことと (Y は濃度 $< \beta$ の集合の $< \beta$ 個の和)^M を合わせて，$(|Y| < \beta)^M$ を得る．$(Y \subseteq \beta \wedge \sup Y = \beta \wedge \mathrm{type}(Y) < \beta)^M$ なので，この $Y \in M$ は $(\mathrm{cf}(\beta) < \beta)^M$ の証人になっている．したがって $\neg \mathrm{Reg}(\beta)^M$ となり，証明が完了した． □

補題 7. 基数 $\lambda \geqslant \aleph_0$ に対し，$\mathbb{P} := \mathrm{Fn}_\lambda(I, J)$ は $(|J|^{<\lambda})^+$-cc をもつ．

Proof. $\theta := (|J|^{<\lambda})^+$ とせよ．$|J| = 0, 1$ のとき，明らか[*3]．そこで $|J| \geqslant 2$ を仮定する．θ は無限基数の後続基数なので正則である．また $\theta > \lambda$ である[*4]．$\mathbb{P}$ が濃度 θ 以上の反鎖を持たないことを示す．そのためには，$\mathbb{P}$ が濃度 θ の反鎖を持たないことを示せば十分である[*5]．$\mathbb{P}$ から勝手に取った部分集合 $\mathcal{C} := \{p_\alpha : \alpha < \theta\}$ が反鎖に成り得ないことを示す．この並べ上げに重複はないものとする．場合分け．
$\boxed{\lambda\text{ が正則基数のとき}}$ 各 $\alpha < \theta$ に対し，$s_\alpha := \mathrm{dom}(p_\alpha) \in [I]^{<\lambda}$ と定めよ．この α を s_a の背番号と呼ぶことにする．$\mathcal{A} := \{s_\alpha : \alpha < \theta\}$ と定める．

Claim 1. $|\mathcal{A}| = \theta$.
[$\because$] $\nu := |\mathcal{A}| < \theta$ から矛盾を導く．$|\mathcal{A}| = \nu$ より，重複を許さず $\mathcal{A} = \{t_\beta : \beta < \nu\}$ と並べられる．すると，各 p_α $(\alpha < \theta)$ に対し，ある $\beta < \nu$ が存在して $p_\alpha \in {}^{(t_\beta)}J$ となる．ゆえに $\mathcal{C} \subseteq \bigcup_{\beta<\nu} {}^{(t_\beta)}J$ となる．右辺の濃度を計算する．まず，各 β に対して $|t_\beta| < \lambda$ なので，補題の仮定より $\left|{}^{(t_\beta)}J\right| \leqslant |J|^{<\lambda} < \theta$ である．よって右辺は濃度 $< \theta$ の集合の $< \theta$ 個の和なので，θ の正則性と合わせて $|(\text{右辺})| < \theta$ を得る．一方で，左辺 $\mathcal{C}$ の濃度は θ なので，これは矛盾． □(Claim 1)

Claim 2. $(|J|^{<\lambda})^{<\lambda} = |J|^{<\lambda}$.　　(もっと単純な証明があれば教えてください >_<)
[$\because$] λ が (1): $\aleph_0$ であるか, (2): 後続基数 $\aleph_{\alpha+1}$ であるか, (3): 極限基数 $\aleph_\eta$ $(\eta : \lim)$ であるかで場合分け．(1): $\lambda = \aleph_0$ のとき．$2 \leqslant |J| < \aleph_0$ なら, $(|J|^{<\aleph_0})^{<\aleph_0} = (\sup_{n<\aleph_0} |J|^n)^{<\aleph_0} = \aleph_0^{<\aleph_0} = \aleph_0 = |J|^{<\aleph_0}$ となるのでよい．$|J| \geqslant \aleph_0$ なら, $(|J|^{<\aleph_0})^{<\aleph_0} = (\sup_{n<\aleph_0} |J|^n)^{<\aleph_0} = (\sup_{n<\aleph_0} |J|)^{<\aleph_0} = |J|^{<\aleph_0}$ となるのでよい．(2): $\lambda = \aleph_{\alpha+1}$ なら，$(|J|^{<\aleph_{\alpha+1}})^{<\aleph_{\alpha+1}} = (|J|^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = |J|^{\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha} = |J|^{\aleph_\alpha} = |J|^{<\aleph_{\alpha+1}}$ なのでよい．(3): $\lambda = \aleph_\eta$ $(\eta : \lim)$ のとき．λ の正則性より $\mathrm{cf}(\lambda) = \lambda$ となる．非減少 λ-列 $S = \langle |J|^\xi : \xi < \lambda \rangle$ in $|J|^{<\lambda}$ について，$\lim_{\xi\to\lambda} |J|^\xi = |J|^{<\lambda}$ であるから，$\mathrm{cf}(\lambda) = \mathrm{cf}(|J|^{<\lambda})$ である ([2] Lemma 3.7 (ii))．λ の正則性と合わせて $\mathrm{cf}(|J|^{<\lambda}) = \lambda$ を得る．$\nu := |J|^{<\lambda}$ とおく．$\forall \kappa < \lambda\, (\nu^\kappa = \nu) \cdots (*)$ を示す．そのために $\kappa < \lambda$ を固定する．$\nu^\kappa = \nu$ を示すには，(i) $\nu > \kappa$, (ii) $\mathrm{cf}(\nu) > \kappa$, (iii) $\forall \mu < \nu\, (\mu^\kappa < \nu)$ を示せばよい ([2] Theorem 5.20 (iii-a))．第一に，$|J| \geqslant 2$ なので，$\kappa < 2^\kappa \leqslant |J|^\kappa \leqslant \nu$ となり $\kappa < \nu$．第二に，先ほどの $\mathrm{cf}(\nu)$ の計算から $\kappa < \lambda = \mathrm{cf}(\nu)$．第三に，$\mu < \nu$ を勝手に取る．先の列 S は ν で非有界なので，ある $(\omega \leqslant)\ \delta < \lambda$ が存在して $\mu \leqslant |J|^\delta$ が成り立つ．両辺 $\kappa\,(< \lambda)$ 乗すれば，$\mu^\kappa \leqslant |J|^{\delta\cdot\kappa} < \nu$ となりよい (最後の $<$ について．$\leqslant$ は明らかだが，もし $=$ なら $\mathrm{cf}(\nu)$ が $\delta \cdot \kappa < \nu$ 以下になってしまう)．以上で $(*)$ が示せた．以上より $(|J|^{<\lambda})^{<\lambda} = \sup_{\kappa<\lambda} (|J|^{<\lambda})^\kappa = \sup_{\kappa<\lambda} \nu^\kappa = \sup_{\kappa<\lambda} \nu = \nu = |J|^{<\lambda}$ となりよ

[*3] $|J| = 0, 1$ のとき $(|J|^{<\lambda})^+ = 2$ である．$|J| = 0$ のとき $J = \varnothing$ なので，$\mathbb{P} = \varnothing$ または $\{\varnothing\}$．よって，$\mathbb{P}$ の反鎖としては $\varnothing$ か $\{\varnothing\}$ しかあり得ないので，2-cc が満たされる．$|J| = 1$ なら $\mathbb{P} = \{s \times \{*\} : s \in [I]^{<\lambda}\}$ であり，$\mathbb{P}$ の反鎖は $\varnothing$ か $\{p\}$ $(p \in \mathbb{P})$ しかあり得ないので，再び 2-cc が満たされる．

[*4] 何となれば：$\lambda < (|J|^{<\lambda})^+$，すなわち $|J|^{<\lambda} \geqslant \lambda$ を示せばよい．$|J|^{<\lambda} = \sup_{\kappa<\lambda} |J|^\kappa \geqslant \sup_{\kappa<\lambda} 2^\kappa \geqslant \sup_{\kappa<\lambda} \kappa^+ = \lambda$ なのでよい．

[*5] 何となれば：『サイズ κ $(\geq \theta)$ の反鎖が存在する $\Longrightarrow$ サイズ θ の反鎖が存在する』は，反鎖の部分集合が再び反鎖になることから明らか．『』の対偶を取ればよい．

い．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　$\square$(Claim 2)

$\mathcal{A}$ に Δ-システム補題を適用して，$r \subseteq I$, $|r| < \lambda$ なる集合 r ならびに r を根とする Δ-システム $\mathcal{B}$ で，$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, $|\mathcal{B}| = \theta$ なるものを得る[*6]．$\mathcal{B}$ の元の背番号全体の集合を $B\,(\subseteq \theta)$ とせよ．$\mathcal{B}$ は r を根とする Δ-システムなので，$\forall \alpha, \beta \in B\,(\alpha \neq \beta \to s_\alpha \cap s_\beta = r)$ が成り立つ．さて，$|r| < \lambda$ より $|{}^r J| = |J|^{|r|} \leqslant |J|^{<\lambda} < \theta$ である．一方で $\mathcal{B}$ の濃度は θ なので，鳩の巣原理より，ある $\alpha, \beta \in B$, $\alpha \neq \beta$ で，$p_\alpha \restriction r = p_\beta \restriction r$ なるものが存在する (図 2)．この α, β について，函数値が $r \subseteq \mathrm{dom}(p_\alpha) \cup \mathrm{dom}(p_\beta)$ で一致するので，p_α, p_β は函数として両立する．すなわち $p_\alpha \not\perp p_\beta$．したがって，$\mathcal{C}$ は反鎖ではない．

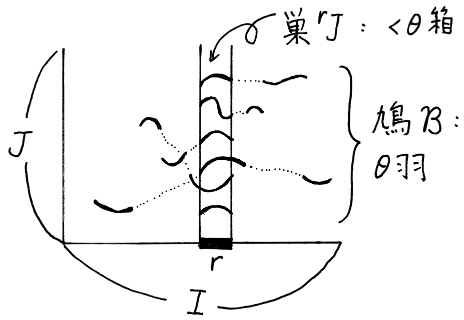

図 2　$<\theta$ 箱の巣 ${}^r J$ と θ 羽の鳩たち $\mathcal{B}$．点線は見易さのために描いたにすぎず，本来は空白であるべきことに注意．

$\boxed{\lambda \text{ が特異基数のとき}}$ $\mathcal{C}$ を濃度で類別して $\mathcal{C} = \bigsqcup_{\kappa<\lambda} C_\kappa$,　$C_\kappa = \{p \in \mathcal{C} : |p| = \kappa\}$ とせよ．もしも $\forall \kappa < \lambda\,(|C_\kappa| < \theta)$ ならば，$\mathcal{C}$ は濃度 $<\theta$ の集合の $<\theta$ 個の和なので，θ の正則性より $|\mathcal{C}| < \theta$ となり，矛盾．よってある $\kappa < \lambda$ が存在して $|C_\kappa| = \theta$ である．この κ について，$\mathcal{C}' := \{p \in \mathcal{C} : |p| < \kappa^+\}$ $(\supseteq C_\kappa)$ は濃度 θ をもつ．$\mathcal{C}' \subseteq \mathrm{Fn}_{\kappa^+}(I, J)$ となっていることに留意せよ．正則基数については補題が証明してある．κ^+ は正則なので，$\mathrm{Fn}_{\kappa^+}(I, J)$ は $(|J|^{<\kappa^+})^+$-cc をもつ．$\kappa^+ \leqslant \lambda$ より $(|J|^{<\kappa^+})^+ \leqslant \theta$ なので，$\mathrm{Fn}_{\kappa^+}(I, J)$ は θ-cc をもつ[*7]．$\mathcal{C}'$ は濃度 θ を持つため $\mathrm{Fn}_{\kappa^+}(I, J)$ で反鎖でない．よって，それより広い $\mathbb{P}$ でも反鎖でない．$\mathcal{C} \supseteq \mathcal{C}'$ より，$\mathcal{C}$ は $\mathbb{P}$ で反鎖でない．　$\square$

系 8. $I, J \in M$, $[\mathrm{Reg}(\lambda) \wedge |J| \leqslant 2^{<\lambda} \wedge \theta := (2^{<\lambda})^+]^M$ ならば，$\mathrm{Fn}_\lambda(I, J)^M$ は θ-cc を持ち，したがって θ 以上の共終数と θ 以上の基数を保つ．

Proof. $(|J| \leqslant 2^{<\lambda})^M$ と $\mathrm{Reg}(\lambda)^M$ より，補題 7 の Claim 2 と同様にして $(|J|^{<\lambda} \leqslant (2^{<\lambda})^{<\lambda} = 2^{<\lambda})^M$ を得る．よって $[\,(|J|^{<\lambda})^+ \leqslant (2^{<\lambda})^+]^M$ である．M における補題 7 から $[\mathrm{Fn}_\lambda(I, J)$ は $(|J|^{<\lambda})^+$-cc をもつ$]^M$．よってそれ以上の $(2^{<\lambda})^+$ でも言えるので，$[\mathrm{Fn}_\lambda(I, J)$ は $(2^{<\lambda})^+$-cc をもつ$]^M$ が言える．つまり $[\mathrm{Fn}_\lambda(I, J)$ は θ-cc をもつ$]^M$．$I, J \in M$ と $\mathrm{Reg}(\lambda)^M$ (したがって $\mathrm{Card}(\lambda)^M$) より，$\mathrm{Fn}_\lambda(I, J) \in M$ である．さらに，(θ は無限基数の後続基数$)^M$ なので (θ は非可算正則基数$)^M$ である．補題 6 により $\mathrm{Fn}_\lambda(I, J)$ は θ 以上の共終数と θ 以上の基数を保つことがわかる．　$\square$

系 9. $I, J \in M$, (J は可算$)^M$ ならば，$\mathrm{Fn}(I, J)$ は ccc を持ち，したがって共終数と基数を保つ．

[*6] Δ-システム補題が使える条件『(1): λ が無限基数，(2): $\theta\,(> \lambda)$ は正則基数，(3): $\forall \zeta < \theta\,(|\zeta^{<\lambda}| < \theta)$，(4): $|\mathcal{A}| \geqslant \theta$，(5): $\forall x \in \mathcal{A}\,(|x| < \lambda)$』を確認しなければならない．(1), (2), (4), (5) は明らか．(3): Claim 2 を用いることで，$\zeta < \theta \Longrightarrow \zeta < (|J|^{<\lambda})^+ \Longrightarrow \zeta \leqslant |J|^{<\lambda} \Longrightarrow |\zeta^{<\lambda}| \sim {}^{<\lambda}\zeta \sim |\zeta|^{<\lambda} \leqslant (|J|^{<\lambda})^{<\lambda} = |J|^{<\lambda} < \theta$ となるのでよい．

[*7] 定義より直ちに，『$\mu \leqslant \nu$ について，$\mathbb{P}$ が μ-cc を持つならば $\mathbb{P}$ は ν-cc を持つ』ことがいえる．

Proof. 系 8 の $\lambda = \omega$ の場合に当たる．M の中で：$\mathrm{Reg}(\omega)$, $|J| \leqslant \aleph_0 = 2^{<\omega}$, $\theta = (2^{<\omega})^+ = \aleph_0^+ = \aleph_1$ となっているのでよい． □

参考文献

本稿では，主に [5], Ch.IV, §7 を参考にしました．対応する定理番号の明記は行っていません．

[1] Devlin, K., *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory* (2nd ed.), Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1993.

[2] Jech, T., *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2002.

[3] Kunen, K., *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, Vol. 102. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1980. 邦訳 [13].

[4] Kunen, K., *The Foundations of Mathematics*, Vol. 19. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2009. 邦訳 [14].

[5] Kunen, K., *Set Theory* (rev. ed.), Vol. 34. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.

[6] Schindler, R., *Set Theory, Exploring Independence and Truth*, Universitext, Springer, 2014.

[7] Shoenfield. J.R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

[8] Takeuti, G. and Zaring, W.M., *Introduction to Axiomatic Set Theory* (2nd ed.), Vol. 1. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1982.

[9] Weaver, N., *Forcing for Mathematicians*, World Scientific Publishing, 2014.

[10] 新井敏康, 数学基礎論, 岩波書店, 2011.

[11] 菊池誠, 不完全性定理, 共立出版, 2014.

[12] 倉田令二朗・篠田寿一, 公理論的集合論, 倉田令二郎監修・数学基礎論シリーズ 2 巻, 河合文化教育研究所, 1996.

[13] K. キューネン（藤田博司訳）, 集合論–独立性証明への案内, 日本評論社, 2008. [3] の邦訳.

[14] K. キューネン（藤田博司訳）, キューネン数学基礎論講義, 日本評論社, 2016. [4] の邦訳.

[15] 田中一之編・著, 数学基礎論講義, 日本評論社, 1997.

[16] 田中一之編, ゲーデルと 20 世紀の論理学 4 集合論とプラトニズム, 東京大学出版会, 2007.

[17] 田中一之・鈴木登志雄, 数学のロジックと集合論, 培風館, 2003.

[18] 田中尚夫, 公理的集合論, 現代数学レクチャーズ (B-10), 培風館, 1982.

[19] 田中尚夫, 選択公理と数学–発生と論争、そして確立への道 (増訂版), 遊星社, 2005.