# 集合論ノート 0010
# 強制法における Definability Lemma と Truth Lemma

近藤友祐 (@elecello_)

初稿：2018 年 9 月 26 日　　更新：2020 年 7 月 11 日
この文書の場所：　https://elecello.com/works.html

## 目次



## 1 はじめに

**記法 1.** (i) 本稿では，論理記号は正式には $\wedge, \neg, \exists$ のみとし，$\rightarrow, \leftrightarrow, \vee, \forall$ は単なる構文糖衣と考える．

(ii) メタな議論にも集合論の記号を援用する．例えば，“$\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}}$” と書いたとき，これは「$\varphi$ は，2 項関係記号 $\in$ のみからなる集合論の言語の論理式である」という日本語の略記であると考える．この約束のもと，$\mathcal{L} := \{\in\}$，$\mathrm{FreeVar}(\varphi) :=$ “$\varphi$ に含まれる自由変数全体”，$\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}} :=$ “$\mathcal{L}$-論理式全体”，$\mathrm{Sent}_{\mathcal{L}} :=$ “$\mathcal{L}$-文全体” などと定める．

(iii) $\varphi, \psi, \ldots$ などは $\mathcal{L}$-論理式を表すとする．特に断りの無い場合，$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ と書いたら，それは $\mathrm{FreeVar}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ であることを意味すると約束する．

(iv) 議論のベースとなるメタ理論を $T$ で表す．$T$ としては ZFC などが想定される．

(v) 特に断りのない場合，$M$ は ZFC の ctm を表す記号とする．

(vi) $\langle \mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1} \rangle \in M$ は poset とする．これは正確には，$\mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1} \in M$ のこと．$\langle \mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1} \rangle$ を $\mathbb{P}$ と略記することもある．

(vii) $\tau, \pi, \vartheta, \ldots$ やそれに添え字を付けたものは，特に断りの無い場合 $M^{\mathbb{P}}$ の元とする[a]．

(viii) $x_1, \ldots, x_n$ を $\vec{x}$ と略記し，$\tau^1, \ldots, \tau^n$ を $\vec{\tau}$ と略記する．ただし $n \geqslant 0$ は任意．

[a] $\tau^1$ のように上付きの添え字を使うこともある．そのようにすると，$\mathrm{val}(\tau^1, G)$ を $\tau^1_G$ と書けてスッキリする (下付きだと $(\tau_1)_G$ ないし $\tau_{1G}$ のようになってしまう)．それ以上の深い意味はない (追記: 今思ったけど $\tau_1^G$ と書けば良い気がしてきた．面倒なので修正はしない)．

## 2 強制関係その 1: $\Vdash$

**定義 2.** 記法 1 のもと，$p \in \mathbb{P}$ に対し，

$$p \Vdash_{\mathbb{P},\leqslant,\mathbb{1},M} \varphi(\tau^1,\ldots,\tau^n) :\Longleftrightarrow \forall G\,[(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge p \in G) \to M[G] \models \varphi(\tau^1_G,\ldots,\tau^n_G)] \tag{1}$$

と定める．$\langle \mathbb{P},\leqslant,\mathbb{1}\rangle, M, \vec{\tau}$ が文脈から明らかな場合，$p \Vdash_{\mathbb{P},\leqslant,\mathbb{1},M} \varphi(\vec{\tau})$ を単に $p \Vdash \varphi$ と書く．

**注意 3.** (1) "$M[G] \models \varphi(\tau^1_G,\ldots,\tau^n_G)$" は，集合論の中で定義された充足関係である．したがって，正確には "$M[G] \models \ulcorner\varphi\urcorner[\tau^1_G/x_1,\ldots,\tau^n_G/x_n]$" とでも書くべきであろうが，そこまで pedantic にはならないことにする．充足関係の定義は通常通りになされるので，"$M[G] \models \varphi(\vec{\tau}_G)$ or $M[G] \models \neg\varphi(\vec{\tau}_G)$" は必ず成り立つ．一方で，"$p \Vdash \varphi(\vec{\tau})$ or $p \Vdash \neg\varphi(\vec{\tau})$" は必ずしも成り立つとは限らない．ちなみに，これが成り立つとき，$p$ は $\varphi$ を **decide** するといい，$p \parallel \varphi$ と書く．

(2) 定義 2 は**定義図式**である．すなわち，高々 $x_1,\ldots,x_n$ のみを自由変数に持つメタな $\mathcal{L}$-論理式 $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ が具体的に与えられるごとに，ちょうど $n+5$ 個の自由変数を持つメタな $\mathcal{L}$-論理式 $\mathrm{Force}_{\varphi(x_1,\ldots,x_n)}(\mathrm{v}_{01},\ldots,\mathrm{v}_{0n},\mathrm{v}_{11},\mathrm{v}_{12},\mathrm{v}_{13},\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3)$ を書き下す規則を与えているのである．ここに，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Force}_{\varphi(x_1,\ldots,x_n)}(\tau^1,\ldots,\tau^n,\mathbb{P},\leqslant,\mathbb{1},p,M)\\ &:\Longleftrightarrow \text{“}M \models \ulcorner\mathrm{ZFC}\urcorner\text{: ctm”} \wedge \langle \mathbb{P},\leqslant,\mathbb{1}\rangle \in M\colon \text{poset} \wedge \vec{\tau} \in M^{\mathbb{P}} \wedge p \in \mathbb{P} \wedge \text{“式 (1) の右辺”}\end{aligned} \tag{2}$$

として，これを $p \Vdash_{\mathbb{P},\leqslant,\mathbb{1},M} \varphi(\tau^1,\ldots,\tau^n)$ と書くと規約しているのである．

(3) $p \Vdash_{\mathbb{P},\leqslant,\mathbb{1},M} \varphi(\vec{\tau})$ を定義するためには，**すべての** $(M,\mathbb{P})$-generic filter $G$ を参照しなくてはならない．ところが，一般には $G \notin M$ であるから[a]，$M$ の中だけで $\Vdash$ を定義することは一見不可能に思える．しかし，ある意味でこれが可能であることを主張するのが定義可能性補題である．

(4) 本稿で取り扱っている定義・定理・補題の多くは，具体的に与えられたメタな $\mathcal{L}$-論理式に関する**定義図式・定理図式**であることに注意.

[a] というか，我々が主に関心を持っているのは $G \notin M$ の場合である．

**補題 4** (**$\Vdash$ に関する拡大補題**)**.** 記法 1 のもと，任意の $p,q \in \mathbb{P}$ に対し

$$p \Vdash_{\mathbb{P},M} \varphi(\vec{\tau}) \ \ \& \ \ q \leqslant p \ \Longrightarrow\ q \Vdash_{\mathbb{P},M} \varphi(\vec{\tau})^a. \tag{3}$$

[a] 論理結合子に & や ⇒ を用いているのは単に見易さのためであって，特に深い意味はない．

**証明.** $p \Vdash_{\mathbb{P},M} \varphi(\vec{\tau})$ と $q \leqslant p$ を仮定せよ．前半より

$$\forall G\,[(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge p \in G) \to M[G] \models \varphi(\vec{\tau}_G)] \tag{4}$$

が成り立つ．$q \Vdash_{\mathbb{P},M} \varphi(\vec{\tau})$ を示すために，任意の $H\colon (M,\mathbb{P})$-generic を取り，$q \in H$ を仮定せよ (want: $M[H] \models \varphi(\vec{\tau}_G)$)．$H \ni q \leqslant p \in \mathbb{P}$ と $H$ の filter 性より $p \in H$．すると仮定 (4) が使えて ($G$ として $H$ を取

れ)，$M[H] \models \varphi(\vec{\tau}_G)$. $\square$

**補題 5.** 記法 1 のもと，

(1) $\neg \exists p \in \mathbb{P}\,(p \Vdash \varphi \ \&\ p \Vdash \neg\varphi)$,

(2) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Longrightarrow (p \Vdash \varphi \iff p \Vdash \psi)$[a].

[a] $\vec{\tau}$ は省略した．今後も同様の省略を行うことがある．

**証明.** (1): 背理法．ある $p \in \mathbb{P}$ が存在して $p \Vdash \varphi$ かつ $p \Vdash \neg\varphi$ となるとする．$\Vdash$ の定義より，

$$\begin{gathered}\forall G\,[(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge p \in G) \to M[G] \models \varphi] \\ \wedge\ \forall G\,[(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge p \in G) \to M[G] \models \neg\varphi].\end{gathered}$$

よって[*1]，$\forall G\,[(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge p \in G) \to (M[G] \models \varphi \ \&\ M[G] \not\models \varphi)]$.
よって，$\forall G\,[(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge p \in G) \to \bot]$．よって，$\forall G\,\neg(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge p \in G)$.
よって，$\neg\exists G\,(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge p \in G)$．$M$ が ZFC の ctm であったことを思い出すと，これは Rasiowa-Sikorski の補題に反する．
(2): $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ とすると，健全性定理より $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ [*2]．よって $M[G] \models \varphi \leftrightarrow \psi$．よって $M[G] \models \varphi \iff M[G] \models \psi$．このことから，

$$\begin{aligned} p \Vdash \varphi &\iff \forall G\,[(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge p \in G) \to M[G] \models \varphi] \\ &\iff \forall G\,[(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge p \in G) \to M[G] \models \psi] \iff p \Vdash \psi. \end{aligned}$$

$\square$

**補題 6.** 記法 1 のもと，任意の $p \in \mathbb{P}$ に対して

(1) $p \Vdash \varphi \wedge \psi \iff (p \Vdash \varphi \ \&\ p \Vdash \psi)$,

(2) (a) $p \Vdash \neg\varphi \Longrightarrow \neg\exists q \leqslant p\,(q \Vdash \varphi)$,  (b) $p \Vdash \varphi \Longrightarrow \neg\exists q \leqslant p\,(q \Vdash \neg\varphi)$,

(3) $p \Vdash \exists x\varphi(x) \Longrightarrow \{r \leqslant p : \exists \sigma \in M^{\mathbb{P}}(r \Vdash \varphi(\sigma))\} \subseteq \mathbb{P}$ is d.b. $p$ [a][b].

[a] 真理補題を確立すれば，(2)(3)(4) の逆向きも証明できる．別稿で扱う予定．
[b] さらに強く，**極大原理**と呼ばれる次の事実が成り立つ：$p \Vdash \exists x\varphi(x) \iff \exists \tau \in M^{\mathbb{P}}\ p \Vdash \varphi(\tau)$．本稿ではこれは取り扱わない．そのうち⋯.

[*1] 一般に $\forall x\,[p(x) \to q(x)] \wedge \forall x\,[p(x) \to r(x)] \iff \forall x\,[(p(x) \to q(x)) \wedge (p(x) \to r(x))] \iff \forall x\,[p(x) \to q(x) \wedge r(x)]$.
[*2] $\varphi, \psi$ は $\mathcal{L}(M^{\mathbb{P}})$ の文なので，冗長に書けば $\vdash_{\mathcal{L}(M^{\mathbb{P}})} \varphi \leftrightarrow \psi$ や $\models_{\mathcal{L}(M^{\mathbb{P}})} \varphi \leftrightarrow \psi$ と書くべきところであろう．ここに，$\mathcal{L}(M^{\mathbb{P}})$ は $\mathcal{L}$ に $M^{\mathbb{P}}$ の元を定数記号としてすべて付け加えた言語である．$M[G]$ は $\mathcal{L}(M^{\mathbb{P}})$-構造なので，ここから $M[G] \models_{\mathcal{L}(M^{\mathbb{P}})} \varphi \leftrightarrow \psi$，すなわち $M[G] \models \varphi \leftrightarrow \psi$ を帰結できる．また，我々が有限的な立場に立つ以上，“$\vdash_{\mathcal{L}(M^{\mathbb{P}})} \rho$” などは集合論の中での言明ととるしかない．

**証明.** (1): 脚注$*1$を参照して:

$$
\begin{aligned}
& p \Vdash \varphi \wedge \psi \\
\iff & \forall G\,[(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge p \in G) \to M[G] \models \varphi \wedge \psi] \\
\iff & \forall G\,[(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge p \in G) \to (M[G] \models \varphi \;\&\; M[G] \models \psi)] \\
\iff & \forall G\,[(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge p \in G) \to M[G] \models \varphi] \\
& \;\&\; \forall G\,[(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge p \in G) \to M[G] \models \psi] \\
\iff & p \Vdash \varphi \;\&\; p \Vdash \psi.
\end{aligned}
$$

(2-a): $p \Vdash \neg\varphi$を仮定する．$q \Vdash \varphi$なる$q \leqslant p$が存在するとして矛盾を導く．$q \leqslant p$で$p \Vdash \neg\varphi$なので，拡大補題 (補題 4) より$q \Vdash \neg\varphi$である．よって$q \Vdash \varphi \;\&\; q \Vdash \neg\varphi$となるが，これは補題 5 の (1) に反する．
(2-b): $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg(\neg\varphi)$なので，補題 5 の (2) と (a) の結果より，$p \Vdash \varphi \Longrightarrow p \Vdash \neg(\neg\varphi) \Longrightarrow \neg\exists q \leqslant p\,(q \Vdash \neg\varphi)$.
(3): 一般に，$M[G] \models \forall x\psi(x) \iff \forall \sigma \in M^{\mathbb{P}}(M[G] \models \psi(\sigma_G))$である[$\because$ ($\Rightarrow$) $M[G] \models \forall x\psi(x)$を仮定する．右辺を示すために，$\sigma \in M^{\mathbb{P}}$を勝手に取る．$\sigma_G \in M[G]$であり，仮定より$\forall a \in M[G]\,(M[G] \models \psi(a))$なのだから，$M[G] \models \psi(\sigma_G)$である．($\Leftarrow$) 右辺を仮定する．左辺，つまり$\forall a \in M[G]\,(M[G] \models \psi(a))$を示すために，$a \in M[G] := \{\sigma_G\colon \sigma \in M^{\mathbb{P}}\}$を勝手に取る．すると，ある$\pi \in M^{\mathbb{P}}$が存在して$a = \pi_G$. 右辺の仮定より$M[G] \models \psi(\pi_G)$，すなわち$M[G] \models \psi(a)$である]．また，$\rho$が$x$を自由に含まないとき$(\rho \to \forall x\gamma(x)) \to \forall x(\rho \to \gamma(x))$であることに注意すれば[*3]，この補題の (1),(2) と，補題 5 の (2) の結果を用いて，

$$
\begin{aligned}
p \Vdash \exists x\varphi(x) \Longrightarrow\; & \neg\exists q \leqslant p\,(q \Vdash \neg\exists x\varphi(x)) \\
\Longrightarrow\; & \neg\exists q \leqslant p\,\forall G\,[(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge q \in G) \to M[G] \models \neg\exists x\varphi(x)] \\
\Longrightarrow\; & \neg\exists q \leqslant p\,\forall G\,[(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge q \in G) \to M[G] \models \forall x\neg\varphi(x)] \\
\Longrightarrow\; & \neg\exists q \leqslant p\,\forall G\,[(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge q \in G) \to \forall \sigma \in M^{\mathbb{P}}(M[G] \models \neg\varphi(\sigma_G))] \\
\Longrightarrow\; & \neg\exists q \leqslant p\,\forall G\,\forall \sigma \in M^{\mathbb{P}}[(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge q \in G) \to M[G] \models \neg\varphi(\sigma_G)] \\
\Longrightarrow\; & \neg\exists q \leqslant p\,\forall \sigma \in M^{\mathbb{P}}\forall G\,[(G\colon (M,\mathbb{P})\text{-generic} \wedge q \in G) \to M[G] \models \neg\varphi(\sigma_G)] \\
\Longrightarrow\; & \neg\exists q \leqslant p\,\forall \sigma \in M^{\mathbb{P}}(q \Vdash \neg\varphi(\sigma)) \\
\Longrightarrow\; & \neg\exists q \leqslant p\,\forall \sigma \in M^{\mathbb{P}}[\neg\exists r \leqslant q\,(r \Vdash \varphi(\sigma))] \\
\Longrightarrow\; & \forall q \leqslant p\,\exists \sigma \in M^{\mathbb{P}}[\exists r \leqslant q\,(r \Vdash \varphi(\sigma))] \\
\Longrightarrow\; & \forall q \leqslant p\,\exists r \leqslant q\,[\exists \sigma \in M^{\mathbb{P}}(r \Vdash \varphi(\sigma))] \\
\Longrightarrow\; & \{r \leqslant p : \exists \sigma \in M^{\mathbb{P}}(r \Vdash \varphi(\sigma))\} \subseteq \mathbb{P} \text{ is d.b. } p.
\end{aligned}
$$

□

[*3] 何となれば：$\rho \to \forall x\gamma(x)$で$\forall x\gamma(x)$を$x$で具体化して$\rho \to \gamma(x)$. 全称化して$\forall x(\rho \to \gamma(x))$.

**注意 7.** 補題 5 の (1) より，次のことが直ちにいえる：記法 1 のもと，任意の $p \in \mathbb{P}$ に対して，

$$p \Vdash \neg\varphi \implies p \nVdash \varphi. \tag{5}$$

ここで，$p \nVdash \varphi$ は $\neg(p \Vdash \varphi)$ の略記である．しかし，一般に逆は成り立たない．せいぜい

$$\exists q \leqslant p\,(q \Vdash \neg\varphi) \iff p \nVdash \varphi \tag{6}$$

が成り立つにすぎない [何となれば：($\Rightarrow$): $q \leqslant p$ & $q \Vdash \neg\varphi$ で $p \Vdash \varphi$ なら，拡大補題 (補題 4) より $q \Vdash \varphi$ となり，これは補題 5 の (1) に反する．($\Leftarrow$): $p \nVdash \varphi$ なら，補題 5 の (2) より $p \nVdash \neg(\neg\varphi)$ となり，補題 6 の (2-a) より $\neg\neg\exists q \leqslant p\,(q \Vdash \neg\varphi)$ となり，結果を得る]．標語的に言えば：**not は $\Vdash$ の外に出すことはできるが，中に入れることはできない．**

# 3 強制関係その 2: $\Vdash^*$

補題 6 で示された $\Vdash$ の性質を受け，$\Vdash^*$ を次のように定義する．

**定義 8.** $\varphi, \psi \in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}}$ とし，poset $\mathbb{P}$ を固定する ($\mathbb{P} \in M$ は仮定しない)．$\vec{\tau} \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ (必ずしも $\vec{\tau} \in M^{\mathbb{P}}$ とは限らない) に対し，$p \Vdash^*_{\mathbb{P},\leqslant,\mathbb{1}} \varphi(\vec{\tau})$ を以下のように再帰的に定義する ($\Vdash^*_{\mathbb{P},\leqslant,\mathbb{1}}$ は $\Vdash^*$ と略記する)：

(1) $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$

$$\begin{aligned}
&:\iff \forall\langle\pi_1, s_1\rangle \in \tau_1\ \{q \leqslant p : q \leqslant s_1 \to \exists\langle\pi_2, s_2\rangle \in \tau_2\,(q \leqslant s_2\ \&\ q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)\}\ \text{is d.b.}\,p \\
&\quad \&\ \forall\langle\pi_2, s_2\rangle \in \tau_2\ \{q \leqslant p : q \leqslant s_2 \to \exists\langle\pi_1, s_1\rangle \in \tau_1\,(q \leqslant s_1\ \&\ q \Vdash^* \pi_2 = \pi_1)\}\ \text{is d.b.}\,p,
\end{aligned} \tag{7}$$

(2) $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$

$$:\iff \{q \leqslant p : \exists\langle\pi, s\rangle \in \tau_2\,(q \leqslant s\ \&\ q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)\}\ \text{is d.b.}\,p, \tag{8}$$

(3) $p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau}) \wedge \psi(\vec{\tau}) \ :\iff\ p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau})\ \&\ p \Vdash^* \psi(\vec{\tau})$,

(4) $p \Vdash^* \neg\varphi(\vec{\tau}) \ :\iff\ \neg\exists q \leqslant p\,(q \Vdash^* \varphi(\vec{\tau}))$,

(5) $p \Vdash^* \exists x\varphi(x, \vec{\tau}) \ :\iff\ \{q \leqslant p : \exists\sigma \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}(q \Vdash^* \varphi(\sigma, \vec{\tau}))\} \subseteq \mathbb{P}$ is d.b. $p$.

**記法 9.** 式 (7) の上式に現れる集合を $S^{p,\tau_2}_{\pi_1,s_1}$，下式に現れる集合を $S^{p,\tau_1}_{\pi_2,s_2}$ と略記し，式 (8) に現れる集合を $T^p_{\tau_1,\tau_2}$ と略記することにする．この記法のもとで，

$$p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2 \ :\iff\ \forall\langle\pi_1, s_1\rangle \in \tau_1\,[S^{p,\tau_2}_{\pi_1,s_1}\ \text{d.b.}\,p]\ \ \&\ \ \forall\langle\pi_2, s_2\rangle \in \tau_2\,[S^{p,\tau_1}_{\pi_2,s_2}\ \text{d.b.}\,p], \tag{9}$$

$$p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2 \ :\iff\ T^p_{\tau_1,\tau_2}\ \text{d.b.}\,p \tag{10}$$

となる．$S^{p,\tau_2}_{\pi_1,s_1} = \{u \leqslant p : \Phi(u, \tau_2, \pi_1, s_1, \mathbb{P})\}$，$T^p_{\tau_1,\tau_2} = \{u \leqslant p : \Psi(u, \tau_1, \tau_2, \mathbb{P})\}$ の形に書き表せるので，任意の $p, q \in \mathbb{P}$ について，$q \leqslant p$ ならば $S^{q,\tau_2}_{\pi_1,s_1} \subseteq S^{p,\tau_2}_{\pi_1,s_1}$，$T^q_{\tau_1,\tau_2} \subseteq T^p_{\tau_1,\tau_2}$ であることはすぐにわかる．

集合 $S^{p,\tau_2}_{\pi_1,s_1}$ は「$p$ が思う $\langle\pi_1, s_1\rangle \in \tau_2$ の度合い」と読むことが出来よう．すると，$S^{p,\tau_2}_{\pi_1,s_1}$ d.b. $p$ は「$p$ が思う $\langle\pi_1, s_1\rangle \in \tau_2$ の度合いは十分大きい」と読めるので，$\forall\langle\pi_1, s_1\rangle \in \tau_1\,[S^{p,\tau_2}_{\pi_1,s_1}\ \text{d.b.}\,p]$ は $\tau_1 \subseteq_p \tau_2$ とでも書けよ

う．すると式 (9) は $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2 \ :\Longleftrightarrow\ \tau_1 \subseteq_p \tau_2 \ \&\ \tau_2 \subseteq_p \tau_1$ と書け，等号の定義として自然なものと思える．同じく $T^p_{\tau_1,\tau_2}$ は「$p$ が思う $\tau_1 \in \tau_2$ の度合い」と読める．これが d.b. $p$ とは「$p$ が思う $\tau_1 \in \tau_2$ の度合いは十分大きい」のことだと思えるので，これを $\tau_1 \in_p \tau_2$ とでも書けば，$p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2 \ :\Longleftrightarrow\ \tau_1 \in_p \tau_2$ といったところであろうか？

**注意 10.** (1) 例によって定義 8 は**定義図式**である．すなわち，高々 $x_1, \ldots, x_n$ のみを自由変数に持つメタな $\mathcal{L}$-論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ が具体的に与えられるごとに，ちょうど $n+4$ 個の自由変数を持つメタな $\mathcal{L}$-論理式 $\mathrm{Force}^*_{\varphi(x_1,\ldots,x_n)}(\mathrm{v}_{01}, \ldots, \mathrm{v}_{0n}, \mathrm{v}_{11}, \mathrm{v}_{12}, \mathrm{v}_{13}, \mathrm{v}_2)$ を書き下す規則を与えているのである．そして，$\mathrm{Force}^*_{\varphi(x_1,\ldots,x_n)}(\tau^1, \ldots, \tau^n, \mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1}, p)$ のことを $p \Vdash^*_{\mathbb{P},\leqslant,\mathbb{1}} \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ と書くのである．論理式 $\mathrm{Force}_{\varphi(\vec{x})}$，つまり $\cdot \Vdash_{\cdot,\cdot,\cdot,\cdot} \varphi(\vec{\cdot})$ には $M$ のプレースホルダがあったが，$\mathrm{Force}^*_{\varphi(\vec{x})}$ にはそれがないことに注意する．すなわち，$\cdot \Vdash_{\cdot,\cdot,\cdot,\cdot} \varphi(\vec{\cdot})$ **は $M$ を参照するが，$\cdot \Vdash^*_{\cdot,\cdot,\cdot} \varphi(\vec{\cdot})$ は $M$ と無関係に定義されている**ことに注意せよ．

(2) 我々は，$\varphi(\vec{x})$ が具体的に与えられるごとに，この $\mathrm{Force}^*_{\varphi(\vec{x})}$ を具体的に書き下せることを確認しなければならない．そこでの難点は，定義 8 の (1) の条項で，左辺の $\cdot \Vdash^* \cdot = \cdot$ を定義するために，右辺でも $\cdot \Vdash^* \cdot = \cdot$ を参照していて，一見循環していることである．よって，これを何らかの手段で正当化しなければならない．続く補題 11 を参照.

(3) ここでは，レベルの違う 2 つの「再帰」が用いられている．第一の再帰：集合論の中の超限再帰によって，式 (7) を単独で定めている．これを $\mathrm{EqForce}^*(\tau_1, \tau_2, \mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1})$ とでもする．$p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$ については，再帰を用いずとも，今得た $\mathrm{EqForce}^*$ によって定義できる．第二の再帰：$\wedge, \neg, \exists$ についての条項に沿って，メタレベルの再帰によって，任意の $\mathcal{L}$-論理式についての $\mathrm{Force}^*_\varphi$ を定めている．例えば，既に得ているメタ論理式 $\mathrm{Force}^*_\psi$ と $\mathrm{Force}^*_\rho$ から，新しいメタ論理式 $\mathrm{Force}^*_{\psi\wedge\rho}$ を得るといった具合.

**補題 11.** 定義 8 の (1) の条項は well-defined である．

**証明.** $\mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1}$ をパラメタとする函数 $\mathbf{F}\colon \mathbf{V}^{\mathbb{P}} \times \mathbf{V}^{\mathbb{P}} \to \mathcal{P}(\mathbb{P})$ を，$\mathbf{V}^{\mathbb{P}} \times \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ 上の整礎関係 $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \,\mathbf{R}\, \langle \tau_1, \tau_2 \rangle :\Longleftrightarrow \pi_1 \in \mathrm{dom}(\tau_1) \wedge \pi_2 \in \mathrm{dom}(\tau_2)$ に沿って定めればよい．$\mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}\langle \tau_1, \tau_2 \rangle \subseteq \mathrm{dom}(\tau_1) \times \mathrm{dom}(\tau_2)$: set なので，$\mathbf{R}$ の set-like 性は明らか．整礎性は，$\Phi(\langle \tau_1, \tau_2 \rangle) := \mathrm{rank}(\tau_1)$ と定めれば，$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \,\mathbf{R}\, \langle \tau_1, \tau_2 \rangle \Longrightarrow \Phi(\langle \pi_1, \pi_2 \rangle) < \Phi(\langle \tau_1, \tau_2 \rangle)$ となることからよい．この $\mathbf{R}$ に沿った超限再帰により，クラス函数 $\mathbf{F}$ を $\mathbf{F}(\langle \tau_1, \tau_2 \rangle) = \{p \in \mathbb{P} : p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2\}$ となるように定められれば，$p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2 :\Longleftrightarrow p \in \mathbf{F}(\langle \tau_1, \tau_2 \rangle)$ によって等号に関する $\Vdash^*$ が定められるのでよい．$\mathbf{F}(\langle \tau_1, \tau_2 \rangle) = \mathbf{G}(\langle \tau_1, \tau_2 \rangle, \mathbf{F} {\restriction} \mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(\langle \tau_1, \tau_2 \rangle))$ となるようなクラス函数 $\mathbf{G}$ があればよい．詳細は書き下さないが，等号に関する $\Vdash^*$ の定義を見ると，$\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$，および，$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \,\mathbf{R}\, \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$，つまり $\pi_1 \in \mathrm{dom}(\tau_1)$，$\pi_2 \in \mathrm{dom}(\tau_2)$ であるような $\pi_1, \pi_2$ について $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$ となっているか，i.e. $\mathbf{F}(\langle \pi_1, \pi_2 \rangle)$ の値，がわかっていればよいので，$\mathbf{F}(\langle \tau_1, \tau_2 \rangle) = \mathbf{G}(\langle \tau_1, \tau_2 \rangle, \mathbf{F} {\restriction} \mathrm{Pred}_{\mathbf{R}}(\langle \tau_1, \tau_2 \rangle))$ の形で書ける． □

定義より，補題 5 の (1) と同様の次が成り立つ：

**補題 12.** 定義 8 の記法のもと，$\neg \exists p \in \mathbb{P}\, (p \Vdash^* \varphi \ \&\ p \Vdash^* \neg\varphi)$.

**証明.** 背理法．$p \Vdash^* \varphi \ \&\ p \Vdash^* \neg\varphi$ とする．後半と定義より $\forall q \leqslant p\, (q \nVdash^* \varphi)$ で，特に $q = p$ とすれば $p \nVdash^* \varphi$ な

ので，前半に反する． $\square$

**注意 13.** 注意 7 と同様のことがいえる．すなわち，定義 8 の記法のもと，任意の $p \in \mathbb{P}$ に対して，

$$p \Vdash^* \neg\varphi \implies p \nVdash^* \varphi. \tag{11}$$

しかし，一般に逆は成り立たない．せいぜい $\exists q \leqslant p\,(q \Vdash^* \neg\varphi) \iff p \nVdash^* \varphi$ が成り立つにすぎない．そのことは系 18 で述べる．再び標語的に言えば，**not は $\Vdash^*$ の外に出すことはできるが，中に入れることはできない．**

# 4 Posets について補足

今後の議論のため，posets に関する若干の性質を見ておく．証明は退屈なので読み飛ばしてもよい．もっとも本稿の議論はほとんど退屈なのだが…。

**補題 14.** $\mathbb{P}$ を poset，$r, p \in \mathbb{P}$，$D, D' \subseteq \mathbb{P}$，$\psi(x) \in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}}$ とする．

(1) $D'$ d.b. $p$ & $D' \subseteq D \implies D$ d.b. $p$,
(2) $D$ d.b. $p$ & $r \leqslant p \implies D$ d.b. $r$,
(3) $E := \{r \in \mathbb{P} : D \text{ d.b. } r\}$ d.b. $p \implies D$ d.b. $p$,,
(4) $r \leqslant p$ とするとき，$D^- := \{u \leqslant r : \psi(u)\}$ d.b. $r \iff D^+ := \{u \leqslant p : \psi(u)\}$ d.b. $r$,
特に，$S^{r,\tau_2}_{\pi_1,s_1}$ is d.b. $r \iff S^{p,\tau_2}_{\pi_1,s_1}$ is d.b. $r$,　$T^r_{\tau_1,\tau_2}$ is d.b. $r \iff T^p_{\tau_1,\tau_2}$ is d.b. $r$,
(5) $D^- := \{u \leqslant r : \psi(u)\}$ d.b. $r \iff D^+ := \{u \in \mathbb{P} : \psi(u)\}$ d.b. $r$.

**証明.** (1): 示すべきは $\forall q \leqslant p\, \exists r \leqslant q\,(r \in D)$．$q \leqslant p$ を任意に取る．$D'$ の density より，ある $r \leqslant q$ が存在して $r \in D'$．$D' \subseteq D$ より $r \in D$.
(2): 示すべきは $\forall s \leqslant r\, \exists t \leqslant s\,(t \in D)$．$s \leqslant r$ を勝手に取る．$s \leqslant r \leqslant p$ より $s \leqslant p$．$D$ の density より，ある $t \leqslant s$ が存在して $t \in D$．よって示された．
(3): 示すべきは $\forall s \leqslant p\, \exists t \leqslant s\,(t \in D)$．$s \leqslant p$ を勝手に取る．$E$ の density より，ある $u \leqslant s$ が存在して $u \in E$．$u \in E$ より，$D$ は d.b. $u$．つまり $\forall v \leqslant u\, \exists t \leqslant v\,(t \in D)$．特に $v := u$ とすれば，ある $t \leqslant u$ があって $t \in D$．$t \leqslant u \leqslant s$ より $t \leqslant s$ であるから，示された．
(4): $r \leqslant p$ を仮定すれば，

$$\begin{aligned}
D^- \text{ d.b. } r &\iff \forall s \leqslant r\, \exists t \leqslant s\,(t \in D^-) \\
&\iff \forall s \leqslant r\, \exists t\,(t \leqslant s \wedge t \leqslant r \wedge \psi(t)) \\
&\overset{(*)}{\iff} \forall s \leqslant r\, \exists t\,(t \leqslant s \wedge t \leqslant p \wedge \psi(t)) \\
&\iff \forall s \leqslant r\, \exists t \leqslant s\,(t \in D^+) \\
&\iff D^+ \text{ d.b. } r.
\end{aligned} \tag{12}$$

ここで，$(*)$ の $(\Rightarrow)$ は $t \leqslant r$ ならば $r \leqslant p$ と合わせて $t \leqslant p$ となることから明らか．$(\Leftarrow)$ について．下を仮定する．上を示すために勝手に $s \leqslant r$ をとる．下の仮定より，ある $t$ が存在して $t \leqslant s$，$t \leqslant p$，$\psi(t)$ が成り立つ．$t \leqslant s \leqslant r$ から $t \leqslant r$．よって，この $t$ を証拠に上が満たされる．「特に」は $\psi(u)$ として記法 9 における

$\Phi(u,\tau_2,\pi_1,s_1,\mathbb{P})$ や $\Psi(u,\tau_1,\tau_2,\mathbb{P})$ をとればよい．
(5): (4) で $p=\mathbb{1}$ とすればよい．$u\leqslant\mathbb{1}$ と $u\in\mathbb{P}$ が同値なことに注意せよ． □

**補題 15.** $M\models\ulcorner\mathrm{ZFC}\urcorner$ : 推移的 (可算性は要求しない), $\mathbb{P}\in M,\ E\subseteq\mathbb{P},\ E\in M,\ G$: $(M,\mathbb{P})$-generic とする．このとき，

(1) $G\cap E\neq\varnothing$ or $\exists q\in G\forall r\in E\,(r\perp q)$,
(2) $p\in G\ \ \&\ \ E$ d.b. $p\implies G\cap E\neq\varnothing$.

**証明.** (1): $D:=\{p\in\mathbb{P}:\exists r\in E\,(p\leqslant r)\}\cup\{q\in\mathbb{P}:\forall r\in E\,(r\perp q)\}$ とせよ．左側の集合を $A$，右側の集合を $B$ と呼ぶことにする．この $D$ は $\mathbb{P}$ で dense である [何となれば：$\forall q\in\mathbb{P}\exists p\leqslant q\,(p\in D)$ を示せばよい．$q\in\mathbb{P}$ を勝手に取る．$q\in D$ なら，$p:=q$ を証拠に $p\leqslant q$ で $p\in D$ なのでよい．$q\notin D$ を仮定する．$q\notin D$ より，特に $q\notin B$ である．よって $\exists r\in E\,(r\not\perp q)$ である．$r\not\perp q$ より，共通拡大 $\mathbb{P}\ni p\leqslant r,q$ が存在する．よって，この $r\in E$ を証拠に $p\in A$ である．ゆえに $p\in D$ である．$p\leqslant q$ と合わせて結果を得る]．$\mathbb{P},E\in M$, $M\models\ulcorner\mathrm{ZFC}\urcorner$ で，$D$ は $M$ に対して絶対的な概念のみを用いて作られているので $D\in M$ となる．$G$ の genericity より $G\cap D\neq\varnothing$ である．よって元 $s\in G\cap D$ が取れる．特に $s\in D$ である．場合分け．(i) $s\in A$ のとき．$\exists r\in E\,(s\leqslant r)$ である．この $r\in E$ について，$G\ni s\leqslant r\in\mathbb{P}$ と $G$ の filter 性より $r\in G$．よって $r\in G\cap E$ となり，$G\cap E\neq\varnothing$ なのでよい．(ii) $s\in B$ のとき．$\forall r\in E\,(r\perp s)$ である．よって $q:=s\in G$ を証拠に $\exists q\in G\forall r\in E\,(r\perp q)$ が成り立つのでよい．
(2): 前件を仮定して，$G\cap E=\varnothing$ から矛盾を導く．$G\cap E=\varnothing$ と (1) により，ある $q\in G$ が存在して $\forall r\in E\,(r\perp q)\cdots(*)$．$p,q\in G$ と $G$ の filter 性より，ある $s\in G$ が存在して $s\leqslant p,q$．いま $E$ は d.b. $p$ なので，ある $r\leqslant s$ が存在して $r\in E$．$r\leqslant s\leqslant q$ より $r\leqslant q$．よって $r\leqslant r,q$．よって $r\not\perp q$．$r\in E$ で $r\not\perp q$ なので，これは $(*)$ に反する． □

## 5 原子論理式に関する Truth Lemma

**補題 16** ($\Vdash^*$ **に関する拡大補題など**)**.** $\varphi\in\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}}$ とし，poset $\mathbb{P}$ を固定する ($\mathbb{P}\in M$ は仮定しない)．また $\vec{\tau}\in\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ (必ずしも $\vec{\tau}\in M^{\mathbb{P}}$ とは限らない) とする．このとき，任意の $p\in\mathbb{P}$ に対して，以下は同値である：

(1) $p\Vdash^*\varphi(\vec{\tau})$,
(2) $\forall r\leqslant p\,(r\Vdash^*\varphi(\vec{\tau}))$,
(3) $D:=\{t\leqslant p:t\Vdash^*\varphi(\vec{\tau})\}$ is d.b. $p$.

**証明.** (2) ⇒ (1), (2) ⇒ (3), (1) ⇒ (2), (3) ⇒ (2) の順番で証明する．
$\boxed{(2)\Rightarrow(1)}$ (2) で特に $r=p$ とすれば明らか．$\boxed{(2)\Rightarrow(3)}$ (3): $\forall q\leqslant p\exists s\leqslant q\,(s\in D)$ を示すため，$q\leqslant p$ を任意に取る．(2) で特に $r:=q$ として $q\Vdash^*\varphi(\vec{\tau})$ を得る．よって $s:=q$ を証拠に $s\leqslant q$, $s\in D$.
$\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ $\varphi$ の複雑さに関するメタな帰納法による．

**Base-=.** $\varphi(\vec{\tau})$ が $\tau_1=\tau_2$ のとき．(1) を仮定して $r\leqslant p$ を任意に取ると，

$$\begin{aligned} p\Vdash^*\tau_1=\tau_2 &\Longrightarrow \forall\langle\pi_1,s_1\rangle\in\tau_1\,[S^{p,\tau_2}_{\pi_1,s_1}\text{ is d.b.}\,p]\ \ \&\ \ \forall\langle\pi_2,s_2\rangle\in\tau_2\,[S^{p,\tau_1}_{\pi_2,s_2}\text{ is d.b.}\,p]\\ &\Longrightarrow \forall\langle\pi_1,s_1\rangle\in\tau_1\,[S^{p,\tau_2}_{\pi_1,s_1}\text{ is d.b.}\,r]\ \ \&\ \ \forall\langle\pi_2,s_2\rangle\in\tau_2\,[S^{p,\tau_1}_{\pi_2,s_2}\text{ is d.b.}\,r]\\ &\Longrightarrow \forall\langle\pi_1,s_1\rangle\in\tau_1\,[S^{r,\tau_2}_{\pi_1,s_1}\text{ is d.b.}\,r]\ \ \&\ \ \forall\langle\pi_2,s_2\rangle\in\tau_2\,[S^{r,\tau_1}_{\pi_2,s_2}\text{ is d.b.}\,r]\\ &\Longrightarrow r\Vdash^*\tau_1=\tau_2. \end{aligned} \tag{13}$$

ここで，2 つ目の $(\Rightarrow)$ は補題 14 の (2)，3 つ目は補題 14 の (4) による．

**Base-$\in$.** $\varphi(\vec{\tau})$ が $\tau_1\in\tau_2$ のとき．(1) を仮定して $r\leqslant p$ を任意に取ると，

$$\begin{aligned} p\Vdash^*\tau_1\in\tau_2 &\Longrightarrow T^p_{\tau_1,\tau_2}\text{ is d.b.}\,p\\ &\Longrightarrow T^p_{\tau_1,\tau_2}\text{ is d.b.}\,r\\ &\Longrightarrow T^r_{\tau_1,\tau_2}\text{ is d.b.}\,r\\ &\Longrightarrow r\Vdash^*\tau_1\in\tau_2. \end{aligned} \tag{14}$$

ここで，2 つ目の $(\Rightarrow)$ は補題 14 の (2)，3 つ目は補題 14 の (4) による．

**Induction-$\wedge$.** $\varphi(\vec{\tau})$ が $\psi(\vec{\tau})\wedge\rho(\vec{\tau})$ のとき．I.H. は

$$\begin{cases} p\Vdash^*\psi(\vec{\tau})\Longrightarrow\forall s\leqslant p\,(s\Vdash^*\psi(\vec{\tau})),\\ p\Vdash^*\rho(\vec{\tau})\Longrightarrow\forall s\leqslant p\,(s\Vdash^*\rho(\vec{\tau})). \end{cases} \tag{15}$$

(1): $p\Vdash^*\varphi(\vec{\tau})$，つまり $p\Vdash^*\psi(\vec{\tau})\wedge\rho(\vec{\tau})$ を仮定せよ．(2) を示すため，$r\leqslant p$ を勝手に取る．(1) より，$p\Vdash^*\psi(\vec{\tau})\ \&\ p\Vdash^*\rho(\vec{\tau})$ である．I.H. より $\forall s\leqslant p\,(s\Vdash^*\psi(\vec{\tau}))\ \&\ \forall s\leqslant p\,(s\Vdash^*\rho(\vec{\tau}))$ となる．$s:=r\leqslant p$ とすれば $r\Vdash^*\psi(\vec{\tau})\ \&\ r\Vdash^*\rho(\vec{\tau})$ を得る．よって $r\Vdash^*\psi(\vec{\tau})\wedge\rho(\vec{\tau})$ i.e. $r\Vdash^*\varphi(\vec{\tau})$.

**Induction-$\neg$.** （このステップで I.H. は不要である．）$\varphi(\vec{\tau})$ が $\neg\psi(\vec{\tau})$ のとき．(1): $p\Vdash^*\varphi(\vec{\tau})$，つまり $p\Vdash^*\neg\psi(\vec{\tau})$ を仮定せよ．(2) を示すため，$r\leqslant p$ を勝手に取る．$r\Vdash^*\neg\psi(\vec{\tau})$ を示したい．背理法．$r\not\Vdash^*\neg\psi(\vec{\tau})$ とすると，定義によって $\exists q\leqslant r\,(q\Vdash^*\psi(\vec{\tau}))$ である．このような $q$ を取れ．$q\leqslant r\leqslant p$ より $q\leqslant p$ である．一方，(1) より $\forall s\leqslant p\,(s\not\Vdash^*\psi(\vec{\tau}))$．特に $s:=q$ をとれば $q\not\Vdash^*\psi(\vec{\tau})$．これは $q$ の取り方に反する．

**Induction-$\exists$.** （このステップで I.H. は不要である．）$\varphi(\vec{\tau})$ が $\exists x\psi(x,\vec{\tau})$ のとき．(1): $p\Vdash^*\varphi(\vec{\tau})$，つまり $p\Vdash^*\exists x\psi(x,\vec{\tau})$ を仮定せよ．(2) を示すため，$r\leqslant p$ を勝手に取る．$r\Vdash^*\exists x\psi(x,\vec{\tau})$ を示したい．そのためには，$E:=\{u\leqslant r:\exists\pi\in\mathbf{V}^{\mathbb{P}}\,(u\Vdash^*\psi(\pi,\vec{\tau}))\}$ d.b. $r$ を示せばよい．今，仮定 (1) より $E^+:=\{u\leqslant p:\exists\pi\in\mathbf{V}^{\mathbb{P}}\,(u\Vdash^*\psi(\pi,\vec{\tau}))\}$ d.b. $p$ なので，$E^+$ d.b. $p\Longrightarrow E^+$ d.b. $r\Longrightarrow E$ d.b. $r$ となりよい．ここで 1 つ目の $(\Rightarrow)$ は補題 14 の (2)，2 つ目の $(\Rightarrow)$ は補題 14 の (4) による．

$\boxed{(3)\Rightarrow(2)}$ $\varphi$ の複雑さに関するメタな帰納法による．

**Base-=.** $\varphi(\vec{\tau})$ が $\tau_1=\tau_2$ のとき．$D=\{t\in\mathbb{P}:t\Vdash^*\tau_1=\tau_2\}$ is d.b. $p$ を仮定する．$\forall r\leqslant p\,(r\Vdash^*\tau_1=\tau_2)$ を示すため，$r\leqslant p$ を任意に取って固定する．示すべきは $r\Vdash^*\tau_1=\tau_2$，すなわち

$$\forall\langle\pi_1,s_1\rangle\in\tau_1\,[S^{r,\tau_2}_{\pi_1,s_1}\text{ is d.b.}\,r]\ \ \&\ \ \forall\langle\pi_2,s_2\rangle\in\tau_2\,[S^{r,\tau_1}_{\pi_2,s_2}\text{ is d.b.}\,r]. \tag{16}$$

式 (16) の左側を示すため，$\langle\pi_1,s_1\rangle\in\tau_1$ を任意に取り固定する．$S^{r,\tau_2}_{\pi_1,s_1}$ is d.b. $r$ を示したいが，補題 14 の (3) によると，そのためには

$$E:=\left\{u\in\mathbb{P}:S^{r,\tau_2}_{\pi_1,s_1}\ \text{d.b.}\,u\right\}\ \text{d.b.}\,r \tag{17}$$

を示せば十分である．そのために $v \leqslant r$ を任意に取り固定せよ (want: $\exists t \leqslant v\,(t \in E)$)．$v \leqslant r \leqslant p$ より $v \leqslant p$ である．$D$ の density より，ある $t \leqslant v$ が存在して $t \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$．よって，この $t$ について，$t \leqslant r$ で

$$\forall\langle\sigma_1, r_1\rangle \in \tau_1\,[S^{t,\tau_2}_{\sigma_1,r_1} \text{ is d.b.}\,t] \;\;\&\;\; \forall\langle\sigma_2, r_2\rangle \in \tau_2\,[S^{t,\tau_1}_{\sigma_2,r_2} \text{ is d.b.}\,t]. \tag{18}$$

が成り立つ．この式の左側で特に $\langle\sigma_1, r_1\rangle := \langle\pi_1, s_1\rangle \in \tau_1$ と置くことにより，$S^{t,\tau_2}_{\pi_1,s_1}$ is d.b. $t$ を得る．$t \leqslant r$ より $S^{t,\tau_2}_{\pi_1,s_1} \subseteq S^{r,\tau_2}_{\pi_1,s_1}$ なので，補題 14 の (1) より $S^{r,\tau_2}_{\pi_1,s_1}$ is d.b. $t$ を得る．よって $t \in E$．$t \leqslant v$ と合わせて，結果を得る．対称性より，式 (16) の右側も同様に示せる．

**Base-$\in$.** $D = \{t \in \mathbb{P} : t \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2\}$ is d.b. $p$ を仮定する．$\forall r \leqslant p\,(r \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2)$ を示すため，$r \leqslant p$ を任意に取って固定する．示すべきは $r \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$，すなわち，$T^r_{\tau_1,\tau_2}$ is d.b. $r$．これを示したいのだが，補題 14 の (3) によると，そのためには

$$E := \left\{u \in \mathbb{P} : T^r_{\tau_1,\tau_2} \text{ d.b.}\,u\right\} \text{ d.b.}\,r \tag{19}$$

を示せば十分である．そのために $v \leqslant r$ を任意に取り固定せよ (want: $\exists t \leqslant v\,(t \in E)$)．$v \leqslant r \leqslant p$ より $v \leqslant p$ である．$D$ の density より，ある $t \leqslant v$ が存在して $t \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$．よって，この $t$ について，$t \leqslant r$ で $T^t_{\tau_1,\tau_2}$ is d.b. $t$ が成り立つ．$t \leqslant r$ より $T^t_{\tau_1,\tau_2} \subseteq T^r_{\tau_1,\tau_2}$ なので，補題 14 の (1) より $T^r_{\tau_1,\tau_2}$ is d.b. $t$ を得る．よって $t \in E$．$t \leqslant v$ と合わせて，結果を得る．

**Induction-$\wedge$.** $\varphi(\vec{\tau})$ が $\psi(\vec{\tau}) \wedge \rho(\vec{\tau})$ のとき．I.H. は

$$\begin{cases} D_\psi := \{r \leqslant p : r \Vdash^* \psi(\vec{\tau})\} \text{ d.b.}\,p \Longrightarrow \forall s \leqslant p\,(s \Vdash^* \psi(\vec{\tau})), \\ D_\rho := \{r \leqslant p : r \Vdash^* \rho(\vec{\tau})\} \text{ d.b.}\,p \Longrightarrow \forall s \leqslant p\,(s \Vdash^* \rho(\vec{\tau})). \end{cases} \tag{20}$$

(3): $D := \{r \leqslant p : r \Vdash^* \psi(\vec{\tau}) \wedge \rho(\vec{\tau})\}$ d.b. $p$, つまり $\{r \leqslant p : r \Vdash^* \psi(\vec{\tau}) \;\&\; r \Vdash^* \rho(\vec{\tau})\}$ d.b. $p$ を仮定せよ．明らかに $D = D_\psi \cap D_\rho$ である．よって補題 14 の (1) より $D_\psi \cap D_\rho$ d.b. $p$ & $D_\psi \cap D_\rho \subseteq D_\psi \Longrightarrow D_\psi$ d.b. $p$ となる．同じくして $D_\rho$ d.b. $p$．I.H. より，$\forall s \leqslant p\,(s \Vdash^* \psi(\vec{\tau}))$ & $\forall s \leqslant p\,(s \Vdash^* \rho(\vec{\tau}))$ となり，$s := r$ とおけば $r \Vdash^* \psi(\vec{\tau})$ & $r \Vdash^* \psi(\vec{\tau})$．つまり，$r \Vdash^* \psi(\vec{\tau}) \wedge \rho(\vec{\tau})$．つまり，$r \Vdash^* \varphi(\vec{\tau})$．

**Induction-$\neg$.** (このステップで I.H. は不要である．) 証明に先立って，ひとつ Claim を与える．

**Claim 1.** この補題でのような $p, \varphi, \vec{\tau}$ について，$p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau}) \Longrightarrow p \Vdash^* \neg\neg\varphi(\vec{\tau})$[*4].

[$\because$] 対偶を示す．$p \nVdash^* \neg\neg\varphi$ を仮定する ($\vec{\tau}$ は省略する)．定義より，$\exists q \leqslant p\,(q \Vdash^* \neg\varphi)$ であり，再び定義より $\exists q \leqslant p\,(\neg\exists r \leqslant q\,(r \Vdash^* \varphi))$ を得る．つまり，$\neg\forall q \leqslant p\,\exists r \leqslant q\,(r \Vdash^* \varphi)$．つまり $\{r \leqslant p : r \Vdash^* \varphi\}$ is not d.b. $p$．既に示した $\neg(3) \Rightarrow \neg(2)$ により，$\neg\forall r \leqslant p\,(r \Vdash^* \varphi)$．既に示した $\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$ により，$p \nVdash^* \varphi$. $\square$(Claim 1)

$\varphi(\vec{\tau})$ が $\neg\psi(\vec{\tau})$ のとき．(3): $D := \{u \leqslant p : u \Vdash^* \neg\psi(\vec{\tau})\}$ d.b. $p$ を仮定する．(2) を示したいが，既に (1) $\Rightarrow$ (2) を示しているので，(1): $p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau})$，つまり $p \Vdash^* \neg\psi(\vec{\tau})$ を示せば十分である．背理法．$p \nVdash^* \neg\psi(\vec{\tau})$ から矛盾を導く．$\Vdash^*$ の定義から $\exists q \leqslant p\,(q \Vdash^* \psi(\vec{\tau}))$ である．この $q \leqslant p$ について，Claim 1 より $q \Vdash^* \neg(\neg\psi(\vec{\tau}))$ である．再び $\Vdash^*$ の定義から $\forall s \leqslant q\,(s \nVdash^* \neg\psi(\vec{\tau}))\cdots(*)$ を得る．一方，$D$ の density より，ある $u \leqslant q$ が存在して $u \Vdash^* \neg\psi(\vec{\tau})$ である．これは $(*)$ に反する．

**Induction-$\exists$.** (このステップで I.H. は不要である．) $\varphi(\vec{\tau})$ が $\exists x\psi(x, \vec{\tau})$ のとき．(3): $D := \{t \leqslant p : t \Vdash^* \exists x\psi(x, \vec{\tau})\}$ d.b. $p$ を仮定する．(2) を示すため，$r \leqslant p$ を固定する．$r \Vdash^* \varphi(\vec{\tau})$，すなわち $r \Vdash^* \exists x\psi(x, \vec{\tau})$ を示したい．そのためには $E := \{q \leqslant r : \exists\sigma \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}\,(q \Vdash^* \psi(\sigma, \vec{\tau}))\}$ d.b. $r$，すな

[*4] 逆は系 17 で示す．

わち $\forall s \leqslant r\,\exists q \leqslant s\,\exists\sigma \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}\,(q \Vdash^* \psi(\sigma,\vec{\tau}))\cdots(**)$ を言えばよい．$s \leqslant r$ を勝手に取り固定せよ．$D$ の density より，$u \leqslant s$ で $u \Vdash^* \exists x\psi(x,\vec{\tau})$ なるものがある．$\exists$ に関する $\Vdash^*$ の定義より，$\forall v \leqslant u\,\exists w \leqslant v\,\exists\pi \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}\,(w \Vdash^* \psi(\pi,\vec{\tau}))$ である．$v := u$ として存在が保証される $w \leqslant v\,(= u), \pi \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ を $q, \sigma$ とせよ．$q \leqslant u \leqslant s$ より $q \leqslant s$ なので，これらを証拠に $(**)$ が成り立つのでよい．

□

**系 17.** 補題 16 の記法のもと，任意の $p \in \mathbb{P}$ に対して，$p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau}) \iff p \Vdash^* \neg\neg\varphi(\vec{\tau})$.

**証明.** $(\Rightarrow)$ は既に Claim 1 で示した．$(\Leftarrow)$ を示すため，$p \Vdash^* \neg\neg\varphi$ を仮定する．$\Vdash^*$ の定義を用いて，$\neg\exists q \leqslant p\,(q \Vdash^* \neg\varphi)$，再び $\Vdash^*$ の定義から $\neg\exists q \leqslant p\,(\neg\exists r \leqslant q\,(r \Vdash^* \varphi))$ を得る．つまり $\forall q \leqslant p\,\exists r \leqslant q\,(r \Vdash^* \varphi)$．つまり，$\{r \leqslant p : r \Vdash^* \varphi\}$ is d.b. $p$ である．補題 16 の $(3) \Rightarrow (1)$ より $p \Vdash^* \varphi$ を得る． □

**系 18.** 補題 16 の記法のもと，任意の $p \in \mathbb{P}$ に対して，$\exists q \leqslant p\,(q \Vdash^* \neg\varphi(\vec{\tau})) \iff p \not\Vdash^* \varphi(\vec{\tau})$.

**証明.** $(\Rightarrow)$: $q \leqslant p \;\&\; q \Vdash^* \neg\varphi$ で $p \Vdash^* \varphi$ なら，拡大補題 (補題 16 の $(1) \Rightarrow (2)$) により，$q \Vdash^* \varphi$ となり，これは補題 12 に反する．$(\Leftarrow)$: $p \not\Vdash \varphi$ なら，系 17 より $p \not\Vdash^* \neg(\neg\varphi)$ となり，$\Vdash^*$ の定義より $\neg\neg\exists q \leqslant p\,(q \Vdash^* \neg\varphi)$ となり，結果を得る． □

**補題 19.** $\varphi(x,y)$ を，$x = y$ ないし $x \in y$ の形の論理式とする．$M \models \ulcorner\mathrm{ZFC}\urcorner$ を (可算とは限らない) を推移的モデル，$\mathbb{P} \in M$, $G$: $(M,\mathbb{P})$-generic, $\tau^1, \tau^2 \in M^{\mathbb{P}}$ とする．このとき，

(1) 任意の $p \in \mathbb{P}$ について，$[p \in G \;\;\&\;\; (p \Vdash^* \varphi(\tau^1,\tau^2))^M \implies M[G] \models \varphi(\tau^1_G,\tau^2_G)]$,
(2) $M[G] \models \varphi(\tau^1_G,\tau^2_G) \implies \exists p \in G\;(p \Vdash^* \varphi(\tau^1,\tau^2))^M$.

**証明.** 原子論理式に関する $\Vdash^*$ は，補題のような $M$ に対し絶対的なので，肩の $M$ はあってもなくても同値であることに注意せよ．以下で，肩に $M$ がない命題を示す．$\varphi(x,y)$ が $x = y$ のときについての (1),(2) を順に示し，その後に $\varphi(x,y)$ が $x \in y$ のときについての (1),(2) を順に示す.

**(1-=).** $\varphi(x,y)$ が $x = y$ のとき (このケースでは補題 11 の $\mathbf{R}$ に関する超限帰納法を用いる)．$p \in G$ が $p \Vdash^* \tau^1 = \tau^2$ を満たしていると仮定する．示すべきは $M[G] \models \tau^1_G = \tau^2_G$，すなわち，$\tau^1_G = \tau^2_G$，すなわち $\tau^1_G \subseteq \tau^2_G \;\&\; \tau^1_G \supseteq \tau^2_G$ である．まず $\tau^1_G \subseteq \tau^2_G$ を示す．$x \in \tau^1_G$ を勝手に取り固定せよ．定義より $\tau^1_G = \{\pi_G : \exists s \in G\,(\langle\pi,s\rangle \in \tau^1)\}$ であるから，ある $s \in G$ と $\pi \in \mathrm{dom}(\tau^1)$ が存在して $\langle\pi,s\rangle \in \tau^1 \;\&\; x = \pi_G$ である．この $s, \pi$ を固定せよ．示したいのは $x \in \tau^2_G$，すなわち $\pi_G \in \tau^2_G$ である．$p, s \in G$ と $G$ の filter 性より，ある $r \in G$ が存在して $r \leqslant p, s$ が成り立つ．この $r \in G$ を固定せよ．$r \leqslant p$ と $p \Vdash^* \tau^1 = \tau^2$ より，拡大補題 (補題 16 の $(1) \Rightarrow (2)$) から $r \Vdash^* \tau^1 = \tau^2$ が成り立つ．等号に関する $\Vdash^*$ の定義より，$\forall\langle\sigma,t\rangle \in \tau^1[S^{r,\tau_2}_{\sigma,t}$ d.b. $r]$ が成り立つ．特に $\langle\sigma,t\rangle := \langle\pi,s\rangle \in \tau^1$ を選べば，$S^{r,\tau_2}_{\pi,s}$ d.b. $r$ が成り立つ．$r \in G$ と合わせて，補題 15 の (2) より，$G \cap S^{r,\tau_2}_{\pi,s} \neq \varnothing$ である．よって，元 $q \in G \cap S^{r,\tau_2}_{\pi,s}$ が取れる．これを固定せよ．$q \in S^{r,\tau_2}_{\pi,s}$ より，

$$q \leqslant r \;\;\&\;\; q \leqslant s \to \exists\langle\pi^2,s_2\rangle \in \tau^2\,(q \leqslant s_2 \;\&\; q \Vdash^* \pi = \pi^2) \tag{21}$$

が成り立つ．$q \leqslant r \leqslant s$ より $q \leqslant s$ が従うので，上のような $\pi^2, s_2$ が取れる．これを固定せよ．

$G \ni q \leqslant s_2$ と $G$ の filter 性より $s_2 \in G$ である．$\langle \pi^2, s_2 \rangle \in \tau^2$ と合わせて，$\pi^2_G \in \tau^2_G$ が成り立つ．今，$\pi \in \mathrm{dom}(\tau^1)$ & $\pi^2 \in \mathrm{dom}(\tau^2)$ となっているので，$\langle \pi, \pi^2 \rangle \, \mathbf{R} \, \langle \tau^1, \tau^2 \rangle$ である．したがって I.H.: "$q \in G$ & $q \Vdash^* \pi = \pi^2 \Longrightarrow \pi_G = \pi^2_G$" が使えて $\pi_G = \pi^2_G$ である．直上で示した $\pi^2_G \in \tau^2_G$ と合わせて $\pi_G \in \tau^2_G$，すなわち $x \in \tau^2_G$ を得る．$\tau^1_G \supseteq \tau^2_G$ も同様.

**(2-=).** $\varphi(x, y)$ が $x = y$ のとき (このケースでは補題 11 の $\mathbf{R}$ に関する超限帰納法を用いる)．$M[G] \models \tau^1_G = \tau^2_G$，すなわち $\tau^1_G = \tau^2_G$ を仮定せよ．$p \Vdash^* \tau^1 = \tau^2$ なる $p \in G$ を見出したい．

$$D := \{p \in \mathbb{P} : \Psi(p) \vee \Phi_1(p) \vee \Phi_2(p)\}, \quad \text{where} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\Psi(p) \;&:\Longleftrightarrow\; p \Vdash^* \tau^1 = \tau^2, \\
\Phi_1(p) \;&:\Longleftrightarrow\; \exists \langle \pi^1, s_1 \rangle \in \tau^1 \, [p \leqslant s_1 \;\;\&\;\; \forall \langle \pi^2, s_2 \rangle \in \tau^2 \, \forall q \in \mathbb{P} \, ((q \leqslant s_2 \;\&\; q \Vdash^* \pi^1 = \pi^2) \to q \perp p)], \\
\Phi_2(p) \;&:\Longleftrightarrow\; \exists \langle \pi^2, s_2 \rangle \in \tau^2 \, [p \leqslant s_2 \;\;\&\;\; \forall \langle \pi^1, s_1 \rangle \in \tau^1 \, \forall q \in \mathbb{P} \, ((q \leqslant s_1 \;\&\; q \Vdash^* \pi^2 = \pi^1) \to q \perp p)]
\end{aligned} \tag{23}$$

とせよ．$D$ の定義に用いられている概念の $M$ に対する絶対性より，$D \in M$ である．

**Claim 2.** $\forall p \in G \, [\neg \Phi_1(p) \;\&\; \neg \Phi_2(p)]$.

[$\because$] $p \in G$ を固定せよ．$\Phi_1(p)$ から矛盾を導く．$\Phi_1(p)$ の証拠となるような $\pi^1 \in \mathrm{dom}(\tau^1)$ と $s_1 \in \mathrm{rng}(\tau^1)$ を固定せよ．$G \ni p \leqslant s_1$ と $G$ の filter 性より $s_1 \in G$ である．$\langle \pi^1, s_1 \rangle \in \tau^1$ と $s_1 \in G$ より $\pi^1_G \in \tau^1_G$ を得る．これと補題の仮定 $\tau^1_G = \tau^2_G$ より $\pi^1_G \in \tau^2_G$ である．$y := \pi^1_G$ とせよ．$y \in \tau^2_G = \{\pi^2_G : \exists s_2 \in G \, (\langle \pi^2, s_2 \rangle \in \tau^2)\}$ なので，ある $\pi^2 \in \mathrm{dom}(\tau^2)$ と $s_2 \in G$ が存在して $y = \pi^2_G$ である．この $\pi^2, s_2$ を固定せよ．$y = \pi^1_G$ より $\pi^1_G \in \tau^2_G$ を得る．$(y =) \, \pi^1_G = \pi^2_G$ で $\langle \pi^1, \pi^2 \rangle \, \mathbf{R} \, \langle \tau^1, \tau^2 \rangle$ なので，I.H.: "$M[G] \models \pi^1_G = \pi^2_G \Longrightarrow \exists q_0 \in G \, (q_0 \Vdash^* \pi^1 = \pi^2)$" が使えて，$\exists q_0 \in G \, (q_0 \Vdash^* \pi^1 = \pi^2)$ が成り立つ．このような $q_0 \in G$ を固定せよ．$q_0, s_2 \in G$ と $G$ の filter 性より，ある $q \in G$ があって $q \leqslant q_0, s_2$ である．このような $q \in \mathbb{P}$ を固定せよ．$q \leqslant q_0$ と拡大補題 (補題 16 の (1) $\Rightarrow$ (2)) から $q \Vdash^* \pi^1 = \pi^2$ である．今，$\Phi_1(p)$ が成り立っているので，これらの $\langle \pi^2, s_2 \rangle \in \tau^2$ と $q \in \mathbb{P}$ に対して，$q \leqslant s_2$ & $q \Vdash^* \pi^1 = \pi^2$ となっていることから $q \perp p$ を得る．しかし，$p, q \in G$ と $G$ の filter 性より $q \not\perp p$ であるから，これは矛盾．$p \in G \to \neg \Phi_2(p)$ も同様である． $\square$(Claim 2)

さて，もしも $\forall p \in G \, (\neg \Psi(p))$ ならば，Claim 2 と合わせて $\forall p \in G \, [\neg \Psi(p) \wedge \neg \Phi_1(p) \wedge \neg \Phi_2(p)]$，すなわち $\forall p \in G \, (p \notin D)$ となり，$G \cap D = \varnothing$ である．

**Claim 3.** $D$ is dense in $\mathbb{P}$.

[$\because$] $\forall q \in \mathbb{P} \, \exists p \leqslant q \, (p \in D)$ を示せばよい．$q \in \mathbb{P}$ を任意に取り固定せよ．もしも $q \Vdash^* \tau^1 = \tau^2$ となっていれば，$\Psi(q)$ なので，$p := q$ を証拠に $p \in D$ となっているのでよい．$q \not\Vdash^* \tau^1 = \tau^2$ となっているとき．等号に関する $\Vdash^*$ の定義より，

$$\exists \langle \pi^1, s_1 \rangle \in \tau^1 \; \left[ S^{q, \tau^2}_{\pi^1, s_1} \text{ is not d.b.}\, q \right] \quad \text{or} \quad \exists \langle \pi^2, s_2 \rangle \in \tau^2 \; \left[ S^{q, \tau^1}_{\pi^2, s_2} \text{ is not d.b.}\, q \right] \tag{24}$$

が成り立つ．前半が成り立つとして，そのような $\langle \pi^1, s_1 \rangle \in \tau^1$ を固定せよ $\cdots (*)$. $S^{q, \tau^2}_{\pi^1, s_1}$ is not d.b. $q$ より，$\exists p \leqslant q \, \forall u \leqslant p \, (u \notin S^{q, \tau^2}_{\pi^1, s_1})$，すなわち，ある $p \leqslant q$ が存在して

$$\forall u \leqslant p \, [u \leqslant s_1 \;\;\&\;\; \forall \langle \sigma, t \rangle \in \tau^2 \; \neg (u \leqslant t \;\&\; u \Vdash^* \pi^1 = \sigma)] \tag{25}$$

が成り立っている．このような $p \leqslant q$ を固定せよ．この $p$ が $\Phi_1$ を満たすことを確認できれば，$p \in D$ となるのでよい．$\Phi_1(p)$ を確認する．そのためには，その証拠となるような

$\langle \pi^1, s_1\rangle \in \tau^1$ をこしらえる必要があるが，既に $(*)$ で固定した $\langle \pi^1, s_1\rangle \in \tau^1$ がそのようなものであることを示す．まず，式 (25) で特に $u := p$ と置くことによって，$p \leqslant s_1$ を得る．$p \leqslant s_1$ はこれで OK なので，残りの

$$\forall\langle \pi^2, s_2\rangle \in \tau^2\, \forall r \in \mathbb{P}\,((r \leqslant s_2\ \&\ r \Vdash^* \pi^1 = \pi^2) \to r \perp p) \tag{26}$$

を示せばよい．$\langle \pi^2, s_2\rangle \in \tau^2$ と $r \in \mathbb{P}$ を任意に固定し，

$$(r \leqslant s_2\ \&\ r \Vdash^* \pi^1 = \pi^2) \to r \perp p \tag{27}$$

を示す．前件を仮定する．仮に $r \not\perp p$ であったとしよう．すると $s \leqslant r, p$ なる $s \in \mathbb{P}$ がとれる．式 (25) で特に $u := s$，$\langle \sigma, t\rangle := \langle \pi^2, s_2\rangle$ とすることで $s \not\leqslant s_2$ or $s \not\Vdash^* \pi^1 = \pi^2$ を得る．前半はあり得ない：$s \leqslant r \leqslant s_2$ だから．後半もあり得ない：$r \Vdash^* \pi^1 = \pi^2$ と $s \leqslant r$ より，拡大補題 (補題 16 の (1) $\Rightarrow$ (2)) から $s \Vdash^* \pi^1 = \pi^2$ が従うから．以上から $\Phi_1(p)$．よって $p \in D$ である．同じくして，式 (24) の後半からは $\Phi_2(p)$ が従い，$p \leqslant q\ \&\ p \in D$ となるので，これで $D$ の density が確かめられた． □(Claim 3)

Claim 3 と $G$ の genericity より，$G \cap D \neq \varnothing$ である．したがって Claim 2 の直後の議論の仮定 $\forall p \in G\,(\neg\Psi(p))$ は棄却され，$\exists p \in G\, \Psi(p)$，すなわち $\exists p \in G\,(p \Vdash^* \tau^1 = \tau^2)$ が結論する．

**(1-$\in$).** $\varphi(x, y)$ が $x \in y$ のとき．$p \in G$ が $p \Vdash^* \tau^1 \in \tau^2$ を満たすと仮定する．定義により，$T^p_{\tau^1,\tau^2}$ is d.b. $p$ である．$p \in G$ と合わせて，補題 15 の (2) より $G \cap T^p_{\tau^1,\tau^2} \neq \varnothing$ である．元 $q \in G \cap T^p_{\tau^1,\tau^2}$ を取り固定せよ．$q \in T^p_{\tau^1,\tau^2}$ より，$\exists\langle \pi, s\rangle \in \tau^2\,(q \leqslant s\ \&\ q \Vdash^* \pi = \tau^1)$ である．この $\pi, s$ について，$G \ni q \leqslant s$ と $G$ の filter 性より $s \in G$ である．$\langle \pi, s\rangle \in \tau^2$ と合わせて $\pi_G \in \tau^2_G$ を得る．$q \in G$ で $q \Vdash^* \pi = \tau^1$ なので **(1-=)** より $\pi_G = \tau^1_G$ を得る．よって $\tau^1_G \in \tau^2_G$，つまり $M[G] \models \tau^1_G \in \tau^2_G$ となりよい．

**(2-$\in$).** $\varphi(x, y)$ が $x \in y$ のとき．$M[G] \models \tau^1_G \in \tau^2_G$，つまり $\tau^1_G \in \tau^2_G$ を仮定する．$\tau^2_G = \{\pi_G : \exists s \in G\,(\langle \pi, s\rangle \in \tau^2)\}$ なので，ある $s \in G$ と $\pi \in \mathrm{dom}(\tau^2)$ が取れて $\pi_G = \tau^2_G$ が成り立つ．この $s, \pi$ を固定せよ．**(2-=)** より，ある $r \in G$ が取れて $r \Vdash^* \pi = \tau^2$ が成り立つ．$r, s \in G$ と $G$ の filter 性より，ある $p \in G$ が存在して $p \leqslant r, s$ である．この $p$ が $p \Vdash^* \tau^1 \in \tau^2$ を満たすことを示す．そのためには，$T^p_{\tau^1,\tau^2} = \{q \leqslant p : \exists\langle \pi, s\rangle \in \tau^2\,(q \leqslant s\ \&\ q \Vdash^* \pi = \tau^1)\}$ is d.b. $p$，すなわち $\forall u \leqslant p\, \exists q \leqslant u\,(q \in T^p_{\tau^1,\tau^2})$ を示せばよい．$u \leqslant p$ を勝手に取る．$q := u$，および既に固定した $\langle \pi, s\rangle \in \tau^2$ を証拠に $q \in T^p_{\tau^1,\tau^2}$ となっている．何となれば，$q = u \leqslant p \leqslant s$ より $q \leqslant s$ は OK. $r \Vdash^* \pi = \tau^1$ で，$q = u \leqslant p \leqslant r$ なので，拡大補題 (補題 16 の (1) $\Rightarrow$ (2)) から $q \Vdash^* \pi = \tau^1$ も OK. したがって $q \in T^p_{\tau^1,\tau^2}$ である．

□

## 6 Definability Lemma と Truth Lemma

**補題 20.** $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathcal{L}$ 論理式とする．$M \models$「ZFC」を (可算とは限らない) 推移的モデル，$\mathbb{P} \in M$，$G$: $(M, \mathbb{P})$-generic，$\vec{\tau} \in M^{\mathbb{P}}$ とする．このとき，

(1) 任意の $p \in \mathbb{P}$ について，$[\,p \in G\ \ \&\ \ (p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau}))^M \implies M[G] \models \varphi(\vec{\tau}_G)\,]$，
(2) $M[G] \models \varphi(\vec{\tau}_G) \implies \exists p \in G\ (\,p \Vdash^* \varphi(\vec{\tau}))^M$.

**証明.** $\varphi$ の複雑さに関するメタな帰納法で，(1) と (2) を同時に示す．正確を期すと，(1)(2) をそれぞれ $(1)_{\varphi,\vec{\tau}}$, $(2)_{\varphi,\vec{\tau}}$, と書くことにして，メタ命題 $\Phi(\varphi)$: "任意の $\vec{\tau}$ について，$(1)_{\varphi,\vec{\tau}}$ かつ $(2)_{\varphi,\vec{\tau}}$" を $\varphi$ の複雑さに関する帰納法で示すのである．$\varphi$ が原子論理式のときについては補題 19 で示してあるので，帰納法のステップのみを示せばよい．以下の議論で $\vec{\tau}$ は省略する．

**Induction-$\wedge$.** $\varphi$ が $\psi \wedge \rho$ のとき．まず (1) を示す．そのために任意に $p \in G$ を固定し，$(p \Vdash^* \varphi)^M$ を仮定せよ (want: $M[G] \models \varphi$)．$(p \Vdash^* \varphi)^M$ とは $(p \Vdash^* \psi \wedge \rho)^M$，すなわち $(p \Vdash^* \psi \ \ \& \ \ p \Vdash^* \rho)^M$，すなわち $(p \Vdash^* \psi)^M \ \& \ \ (p \Vdash^* \rho)^M$ のことである．I.H. より $M[G] \models \psi \ \ \& \ \ M[G] \models \rho$ を得る．したがって $M[G] \models \psi \wedge \rho$，すなわち $M[G] \models \varphi$ となりよい．次に (2) を示す．$M[G] \models \varphi$ を仮定せよ．$M[G] \models \psi \wedge \rho$ なので $M[G] \models \psi \ \ \& \ \ M[G] \models \rho$ である．I.H. より，ある $r, s \in G$ が存在して $(r \Vdash^* \psi)^M \ \ \& \ \ (s \Vdash^* \rho)^M$ である．$G$ の filter 性より，ある $p \in G$ が存在して $p \leqslant r, s$ が成り立つ．$\langle \mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1} \rangle \in M$ より $(p \leqslant r)^M$ である．$M \models \ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner$ であるから，拡大補題 (補題 16) の議論は $M$ の中で展開できる．したがって，$M$ の中で $M$ の元に関して補題 16 が成り立つので，$(p \leqslant r)^M$ と $(r \Vdash^* \psi)^M$ を合わせて $(p \Vdash^* \psi)^M$ を得る．同様に $(p \Vdash^* \rho)^M$ であるから $(p \Vdash^* \psi \ \ \& \ \ p \Vdash^* \rho)^M$，すなわち $(p \Vdash^* \psi \wedge \rho)^M$，すなわち $(p \Vdash^* \varphi)^M$ を得る．

**Induction-$\neg$.** $\varphi$ が $\neg\psi$ のとき．まず (1) を示す．そのために任意に $p \in G$ を固定し，$(p \Vdash^* \varphi)^M$ を仮定せよ (want: $M[G] \models \varphi$，すなわち $M[G] \not\models \psi$)．背理法．$M[G] \models \psi$ だったとせよ．$\psi$ についての I.H.(2) より，ある $r \in G$ が存在して $(r \Vdash^* \psi)^M$ が成り立つ．$G$ の filter 性より，ある $q \in G$ が存在して $q \leqslant r, p$ が成り立つ．$(r \Vdash^* \psi)^M$ と $M$ の中での拡大補題から $(q \Vdash^* \psi)^M$ を得る．以上より $(\exists q \leqslant p\,(q \Vdash^* \psi))^M$ である．一方，$\neg$ に関する $\Vdash^*$ の定義より，$(p \Vdash^* \neg\psi)^M$ とは $(\neg\exists q \leqslant p\,(q \Vdash^* \psi))^M$ のことであるから，矛盾である．次に (2) を示す．$M[G] \models \varphi$，すなわち $M[G] \not\models \psi$ を仮定せよ (want: $\exists p \in G\,(p \Vdash^* \neg\psi)^M$)．$D := \{p \in \mathbb{P} : (p \Vdash^* \psi)^M \text{ or } (p \Vdash^* \neg\psi)^M\}$ とせよ．$M$ に相対化された $\Vdash^*$ の $M$ に対する絶対性より $D \in M$ である．また $D$ は $P$ で dense である [何となれば：$\forall q \in \mathbb{P}\, \exists p \leqslant q\,(p \in D)$ を示せばよい．$q \in \mathbb{P}$ を勝手に取れ．$(q \Vdash^* \psi)^M$ となっていれば $p := q$ を証拠に $p \leqslant q$, $p \in D$ なので OK. $(q \Vdash^* \psi)^M$ でないとき，$(q \not\Vdash^* \psi)^M$ なので，系 17 から $(q \not\Vdash^* \neg\neg\psi)^M$ となり，$\neg$ に関する $\Vdash^*$ の定義より $\exists p \leqslant q\,(p \Vdash^* \neg\psi)$ を得る．この $p$ を証拠に $p \leqslant q$, $p \in D$ となるのでよい]．$G$ の genericity より $G \cap D \neq \varnothing$ を得る．そこで $p \in G \cap D$ を勝手に取れ．$(p \Vdash^* \psi)^M$ であるか $(p \Vdash^* \neg\psi)^M$ であるかのどちらかである．前半とすると矛盾する [何となれば：$(p \Vdash^* \psi)^M$ ならば，$\psi$ に関する I.H.(1) より，$M[G] \models \psi$ であるが，これは仮定に反する]．よって後半の $(p \Vdash^* \neg\psi)^M$ が成り立つのでよい．

**Induction-$\exists$.** $\varphi$ が $\exists x \psi(x)$ のとき．まず (1) を示す．そのために任意に $p \in G$ を固定し，$(p \Vdash^* \varphi)^M$ を仮定せよ (want: $M[G] \models \exists x \psi(x)$)．仮定と $\exists$ に関する $\Vdash^*$ の定義より $(\{q \leqslant p : \exists \sigma \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}\,(q \Vdash^* \psi(\sigma))\} \text{ d.b. } p)^M$ すなわち，$D := \{q \leqslant p : \exists \sigma \in M^{\mathbb{P}}\,(q \Vdash^* \psi(\sigma))^M\}$ d.b. $p$．また，絶対性より $D \in M$ が成り立つ．$G$ の genericity および $p \in G$ を合わせて，補題 15 の (2) より $G \cap D \neq \varnothing$ を得る．そこで $q \in G \cap D$ を勝手に取り固定せよ．$q \in D$ より，$\exists \sigma \in M^{\mathbb{P}}\,(q \Vdash^* \psi(\sigma))$ である．$q \in G$ と合わせて，$\psi$ に関する I.H.(1) より $M[G] \models \psi(\sigma_G)$ である．$\sigma_G \in M[G]$ なので $M[G] \models \exists x \psi(x)$ である．次に (2) を示す．$M[G] \models \varphi$，すなわち $M[G] \not\models \exists x \psi(x)$ を仮定せよ．すると，ある $a \in M[G]$ が存在して $M[G] \models \psi(a)$ であるが，$M[G]$ の元は何らかの $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ を用いて $\tau_G$ と書けるので，何らかの $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ が存在して $a = \sigma_G$ である．この $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ を固定せよ．よって $M[G] \models \psi(\sigma_G)$．$\psi$ に関する I.H.(2) より，ある $p \in G$ が存在して $(p \Vdash^* \psi(\sigma))^M$ が成り立つ．すると $\{q \leqslant p : \exists \sigma \in M^{\mathbb{P}}\,(q \Vdash^* \psi(\sigma))^M\}$ d.b. $p$ である [何となれば：$r \leqslant p$ を勝手に取れ．$q := r$ および先に固定した $\sigma$ を証拠に $(q \Vdash^* \psi(\sigma))^M$ となる

のでよい．ここに，拡大補題を用いた]．したがって $[\{q \leqslant p : \exists\sigma \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}\,(q \Vdash^* \psi(\sigma))\}\ \text{d.b.}\, p]^M$ である．すなわち，$(p \Vdash^* \exists x\psi(x))^M$ である．

$\square$

**定理 21** (**定義可能性補題，Definability Lemma, Forcing Theorem B**)**.**
論理式 $\varphi(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$ を，自由変数が高々ここに表示したものだけであるような，2 項関係記号 $\in$ のみからなる集合論の言語 $\mathcal{L}$ のメタな論理式であるとする．このとき，ちょうど $n+4$ 個の自由変数を持つメタな $\mathcal{L}$-論理式 $\Phi(\mathrm{v}_{01}, \ldots, \mathrm{v}_{0n}, \mathrm{v}_{11}, \mathrm{v}_{12}, \mathrm{v}_{13}, \mathrm{v}_2)$ が具体的に書き下せて，以下の文 $(*)$ がベースとなる理論 $T$ から証明可能である：
$(*)$ 任意の ctm $M \models \ulcorner\mathrm{ZFC}\urcorner$ と poset $\langle \mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1}\rangle \in M$，$p \in \mathbb{P}$，$\mathbb{P}$-name $\tau^1, \ldots, \tau^n \in M^{\mathbb{P}}$ について，

$$p \Vdash_{\mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1}, M} \varphi(\tau^1, \ldots, \tau^n) \iff M \models \ulcorner\Phi\urcorner[\tau^1, \ldots, \tau^n, \mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1}, p]. \tag{28}$$

**証明.** 求める $\Phi$ は，定義 8 で構成した $\mathrm{Force}^*_{\varphi}$ である．このことを確認しよう．以下，$\Phi(\tau^1, \ldots, \tau^n, \mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1}, p)$ を $p \Vdash^* \varphi$ と略記することにする．
$\boxed{(\Longleftarrow)}$ 右辺，つまり $(p \Vdash^* \varphi)^M$ を仮定せよ．$p \Vdash \varphi$ を示すために，任意の $(M, \mathbb{P})$-generic filter $G$ をとり，$p \in G$ を仮定する．示すべきは $M[G] \models \varphi$ であるが，それは補題 20 の (1) より明らか．
$\boxed{(\Longrightarrow)}$ 左辺，つまり $p \Vdash \varphi$ を仮定する．$D := \{r \leqslant p : (r \Vdash^* \varphi)^M\}$ とせよ．$D \in M$ である．

**Claim 4.** $D$ is dense below $p$.
[$\because$] 背理法．$\exists q \leqslant p \forall r \leqslant q\,(r \notin D)$ を仮定し，このような $q \leqslant p$ を固定せよ．$(\forall r \leqslant q\,(r \neg \Vdash^* \varphi))^M$ なので，系 17 より $(\forall r \leqslant q\,(r \neg \Vdash^* \neg\neg\varphi))^M$ である．$\neg$ に関する $\Vdash^*$ の定義より $(\forall r \leqslant q \forall s \leqslant r\,(s \Vdash^* \neg\varphi))^M$ なので，$r := q$，$s := r = q$ として $(q \Vdash^* \neg\varphi)^M$ を得る．既に示した $(\Longleftarrow)$ より $q \Vdash^* \neg\varphi$ である．Rasiowa-Sikorski の補題によると，$q \in G$ を満たす $(M, \mathbb{P})$-generic filter $G$ が存在する．$q \Vdash^* \neg\varphi$ と合わせて $M[G] \not\models \varphi$ となる．しかし，$G \ni q \leqslant p$ と $G$ の filter 性より $p \in G$ で，定理の仮定より $p \Vdash \varphi$ なので，$M[G] \models \varphi$ である．これは矛盾．　$\square$(Claim 4)

いま，$D\ \text{d.b.}\, p \Longrightarrow (\{r \leqslant p : r \Vdash^* \varphi\}\ \text{d.b.}\, p)^M \Longrightarrow (p \Vdash^* \varphi)^M$ である．ここに，2 つ目の $(\Rightarrow)$ は補題 16 の (2) $\Rightarrow$ (1) による．このことと Claim 4 を合わせて $(p \Vdash^* \varphi)^M$ を得る．　$\square$

**定理 22** (**真理補題，Truth Lemma, Forcing Theorem A**)**.**
論理式 $\varphi(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$ を，自由変数が高々ここに表示したものだけであるような，2 項関係記号 $\in$ のみからなる集合論の言語 $\mathcal{L}$ のメタな論理式であるとする．このとき，以下の文 $(\star)$ がベースとなる理論 $T$ から証明可能である：
$(\star)$ 任意の ctm $M \models \ulcorner\mathrm{ZFC}\urcorner$ と poset $\langle \mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1}\rangle \in M$，$(M, \mathbb{P})$-generic filter $G$，$\mathbb{P}$-name $\tau^1, \ldots, \tau^n \in M^{\mathbb{P}}$ について，

$$M[G] \models \varphi(\tau^1_G, \ldots, \tau^n_G) \iff \exists p \in G\,[\,p \Vdash_{\mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1}, M} \varphi(\tau^1, \ldots, \tau^n)\,]. \tag{29}$$

**証明.** $(\Longrightarrow)$: $M[G] \models \varphi$ なら，補題 20 の (2) より $\exists p \in G\,(p \Vdash^* \varphi)^M$ で，定理 21 の $(\Leftarrow)$ より $\exists p \in G\,(p \Vdash \varphi)$ を得る．$(\Longleftarrow)$: $p \Vdash \varphi$ となるような $p \in G$ を固定すると，$G$ の genericity と $\Vdash$ の定義より，$p \in G$ から直ち

に $M[G] \models \varphi$ が得られる． □

**系 23.** 定理 21 の記法のもと，$S := \{p \in \mathbb{P} : p \Vdash_{\mathbb{P},\leqslant,\mathbb{1},M} \varphi(\tau^1, \ldots, \tau^n)\} \in M$ は $M$ で定義可能な集合である．ここで一般に，集合 $v \subseteq u$, $u \neq \varnothing$ に対し，$v$ が $u$ で**定義可能**であるとは，あるメタな $\mathcal{L}$-論理式 $\psi(x, x_1, \ldots, x_n)$ と $a_1, \ldots, a_n \in u$ が存在して $v = \{x \in u : \langle u, \in \rangle \models \psi(x, a_1, \ldots, a_n)\}$ が成り立つことをいう．

**証明.** $\psi(x, a_1, \ldots, a_{n+3})$ として $\mathrm{Force}^*_\varphi(\tau^1, \ldots, \tau^n, \mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1}, x) \wedge x \in \mathbb{P} \wedge$ “$M \models \ulcorner \mathrm{ZFC} \urcorner$” $\wedge$ etc. をとれば，定理 21 より，$S$ は $\{x \in M : M \models \mathrm{Force}^*_\varphi(\tau^1, \ldots, \tau^n, \mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1}, x) \wedge x \in \mathbb{P} \wedge \text{etc.}\}$ と等しいのでよい．$S \in M$ は，$M$ で分出公理が成り立っていることによる． □

## 参考文献

本稿では，主に [3], Ch.VII, §3 を参考にしました．対応する定理番号の明記は行っていません．


[1] Devlin, K., *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory* (2nd ed.), Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1993.

[2] Jech, T., *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2002.

[3] Kunen, K., *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, Vol. 102. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1980. 邦訳 [13].

[4] Kunen, K., *The Foundations of Mathematics*, Vol. 19. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2009. 邦訳 [14].

[5] Kunen, K., *Set Theory* (rev. ed.), Vol. 34. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.

[6] Schindler, R., *Set Theory, Exploring Independence and Truth*, Universitext, Springer, 2014.

[7] Shoenfield. J.R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

[8] Takeuti, G. and Zaring, W.M., *Introduction to Axiomatic Set Theory* (2nd ed.), Vol. 1. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1982.

[9] Weaver, N., *Forcing for Mathematicians*, World Scientific Publishing, 2014.

[10] 新井敏康, 数学基礎論, 岩波書店, 2011.

[11] 菊池誠, 不完全性定理, 共立出版, 2014.

[12] 倉田令二朗・篠田寿一, 公理論的集合論, 倉田令二郎監修・数学基礎論シリーズ 2 巻, 河合文化教育研究所, 1996.

[13] K. キューネン（藤田博司訳）, 集合論–独立性証明への案内, 日本評論社, 2008. [3] の邦訳.

[14] K. キューネン（藤田博司訳）, キューネン数学基礎論講義, 日本評論社, 2016. [4] の邦訳.

[15] 田中一之編・著, 数学基礎論講義, 日本評論社, 1997.

[16] 田中一之編, ゲーデルと 20 世紀の論理学 4 集合論とプラトニズム, 東京大学出版会, 2007.

[17] 田中一之・鈴木登志雄, 数学のロジックと集合論, 培風館, 2003.

[18] 田中尚夫, 公理的集合論, 現代数学レクチャーズ (B-10), 培風館, 1982.

[19] 田中尚夫, 選択公理と数学–発生と論争、そして確立への道 (増訂版), 遊星社, 2005.