集合論ノート 0007
Δ-システム補題 (Delta System Lemma)

近藤友祐 (@elecello_)

初稿: 2018/03/08　微修正: 2017/03/26
この文書の場所： https://elecello.com/works.html

初等的部分モデルを用いた見通しの良い証明もありますが (今度書くかも？)，ここでは愚直にやります．

定義 1. 集合族 $\mathcal{A}$ が **Δ-システム**であるとは，

$$\exists r \, \forall x, y \in \mathcal{A} \, (x \neq y \to x \cap y = r) \tag{1}$$

が成り立つことをいう．集合 r は Δ-システム $\mathcal{A}$ の**根**と呼ばれる．

定理 2. κ を無限基数，$\theta \, (> \kappa)$ を正則基数で $\forall \zeta < \theta \, (|\zeta^{<\kappa}| < \theta)$ が成り立つものとする．このとき，条件 $|\mathcal{A}| \geqslant \theta$, $\forall x \in \mathcal{A} \, (|x| < \kappa)$ を満たす任意の集合族 $\mathcal{A}$ に対して，$|\mathcal{B}| = \theta$ なる Δ-システム $\mathcal{B} \, (\subseteq \mathcal{A})$ が存在する．

Proof. $|\mathcal{A}_0| = \theta$ なる $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ を任意にとり固定する．定理の仮定より，$\bigcup \mathcal{A}_0$ は濃度 $< \kappa \, (< \theta)$ の集合の θ 個の和なので，$|\bigcup \mathcal{A}_0| \leqslant \theta$ である．よって，単射 $j \colon \bigcup \mathcal{A}_0 \hookrightarrow \theta$ がとれる．$\mathcal{A}_0$ の任意の要素 x について，$j[x] \subseteq \theta$ は整列集合であり，定理の仮定より $\mathrm{type}(j[x]) < \kappa$ が成り立つ (ここに $\mathrm{type}(\cdot)$ は整列集合の順序型を表すものとする)．各順序数 $\gamma < \kappa$ に対し，$\mathcal{A}^{(\gamma)} := \{x \in \mathcal{A}_0 : \mathrm{type}(j[x]) = \gamma\} \, (\subseteq \mathcal{A}_0)$ と定める．

Claim 1. $\exists \gamma < \kappa \, (|\mathcal{A}^{(\gamma)}| = \theta)$.
[$\because$] 背理法．$\forall \gamma < \kappa \, (|\mathcal{A}^{(\gamma)}| \neq \theta)$ とする．$\forall \gamma < \kappa \, (\mathcal{A}^{(\gamma)} \subseteq \mathcal{A}_0)$ なので，$\forall \gamma < \kappa \, (|\mathcal{A}^{(\gamma)}| \leqslant \theta)$ である．したがって $\forall \gamma < \kappa \, (|\mathcal{A}^{(\gamma)}| < \theta)$ となる．すると

$$\theta = |\mathcal{A}_0| = \left| \bigcup_{\gamma < \kappa} \mathcal{A}^{(\gamma)} \right| < \theta \tag{2}$$

となって矛盾する．ここに，右辺の不等号は，その左辺が濃度 $< \theta$ の集合の $\kappa \, (< \theta)$ 個の和であり，かつ θ が正則基数であることから，[?] の定理 I.13.11(1) により従う． $\square$(Claim 1)

Claim 1 で存在が保証される γ のうちの一つを適当に固定し，γ_* とする．その上で $\mathcal{A}_1$ を以下に定める：

$$\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}^{(\gamma_*)} \; (= \{x \in \mathcal{A}_0 : \mathrm{type}(j[x]) = \gamma_*\} \subseteq \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}). \tag{3}$$

Claim 2. $j \left[\bigcup \mathcal{A}_1\right]$ は θ で非有界である．すなわち，$\forall \alpha < \theta \, \exists \beta \in j \left[\bigcup \mathcal{A}_1\right] \, (\alpha \leqslant \beta)$.
[$\because$] α を任意にとり固定する．まず，仮に $\forall x \in \mathcal{A}_1 \, (j[x] \subseteq \alpha)$ ならば，$|j[x]| < \kappa$ に注意して，

$\forall x \in \mathcal{A}_1\,(j[x] \in [\alpha]^{<\kappa})$．よって $\{j[x]\colon x \in \mathcal{A}_1\} \subseteq [\alpha]^{<\kappa}$．両辺の濃度を計算する．左辺について．$j$ の単射性と $|\mathcal{A}_1| = \theta$ に注意すると，左辺の濃度は θ．右辺について．$\alpha < \omega$ のとき有限となり，矛盾．$\alpha \geqslant \omega$ のとき．$\aleph_0 \leqslant \kappa \leqslant |\alpha|$ なら，定理の仮定を用いて $|[\alpha]^{<\kappa}| = |\alpha|^{<\kappa} = ||\alpha|^{<\kappa}| < \theta$．これも矛盾．$|\alpha| < \kappa < \theta$ なら，同じく定理の仮定を用いると，$|(\text{右辺})| = |\mathcal{P}(\alpha)| = \left|\bigcup_{\lambda \leqslant |\alpha|}[\alpha]^{\lambda}\right| = \sup_{\lambda \leqslant |\alpha|}|\alpha|^{\lambda} = |\alpha|^{<|\alpha|^+} \leqslant ||\alpha|^{<\kappa}| < \theta$ となり矛盾．したがって，$\exists x \in \mathcal{A}_1\,(j[x] \not\subseteq \alpha)$，つまり $\exists x \in \mathcal{A}_1\,\exists \beta \in j[x]\,(\beta \notin \alpha)$．$j[x] \subseteq j\left[\bigcup \mathcal{A}_1\right]$ に注意して，$\exists x \in \mathcal{A}_1\,\exists \beta \in j\left[\bigcup \mathcal{A}_1\right]\,(\alpha \leqslant \beta)$．
□(Claim 2)

各 $x \in \mathcal{A}_1$ について，$j[x] \subseteq \theta$ の下から $\xi\,(< \gamma_*)$ 番目の要素を $j[x](\xi)$ で表すことにする．

Claim 3. $\exists \xi < \gamma_*\,(\{j[x](\xi)\colon x \in \mathcal{A}_1\}$ は θ で非有界$)$．すなわち，

$$\exists \xi < \gamma_*\,\forall \alpha < \theta\,\exists x \in \mathcal{A}_1\,(\alpha \leqslant j[x](\xi)). \tag{4}$$

$[\because]$ 背理法．$\forall \xi < \gamma_*\,\exists \alpha < \theta\,\forall x \in \mathcal{A}_1\,(j[x](\xi) < \alpha)$ を仮定する．各 $\xi\,(< \gamma_*)$ ごとに存在が保証される $\alpha\,(< \theta)$ のうちの適当な一つを α_ξ で表すことにする．これにより，$\forall x \in \mathcal{A}_1\,(j[x](\xi) < \alpha_\xi)$ を満たす集合 $X = \{\alpha_\xi\colon \xi < \gamma_*\} \subseteq \theta$ を得る．このとき，$\sup X$ は $\{j[x](\xi)\colon x \in \mathcal{A}_1, \xi < \gamma_*\} = j\left[\bigcup \mathcal{A}_1\right]$ の上界となる．今，θ は正則で $\gamma_* < \theta$ なので，$\sup X < \theta$ でなければならない．以上の考察より $j\left[\bigcup \mathcal{A}_1\right]$ は θ で有界となる．これは Claim 2 に反する．
□(Claim 3)

Claim 3 で存在が保証される ξ のうち最小のものを ξ_* とする ($\xi_* = 0$ となることもあり得る)．最小性より，$\eta < \xi_*$ では $\{j[x](\eta)\colon x \in \mathcal{A}_1\}$ は θ で有界であることに注意する．すると，θ の正則性と合わせて $\alpha_* := \sup\{j[x](\eta) + 1\colon x \in \mathcal{A}_1, \eta < \xi_*\}$ について，$\alpha_* < \theta$ となる．また，定義より明らかに次が成り立つ：

$$\forall x \in \mathcal{A}_1\,\forall \eta < \xi_*\,(j[x](\eta) < \alpha_*). \tag{5}$$

θ までの超限再帰によって，$\mathcal{A}_1$ の元の列 $\langle x_\mu\colon \mu < \theta\rangle$ を以下を満たすように定義する：

$$j[x_\mu](\xi_*) > \max(\alpha_*, \sup\{j[x_\nu](\eta)\colon \eta < \gamma_*, \nu < \mu\}). \tag{6}$$

$\{j[x](\xi_*)\colon x \in \mathcal{A}_1\}$ は θ で非有界，θ は正則なので，これは可能である*1．その上で，$\mathcal{A}_2 := \{x_\mu\colon \mu < \theta\}\,(\subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A})$ と定める．$\langle j[x_\mu](\xi_*)\colon \mu < \theta\rangle$ は真の上昇列で j は単射なので，x_μ はそれぞれ互いに異なる．よって $|\mathcal{A}_2| = \theta$ である．

Claim 4. $\forall x, x' \in \mathcal{A}_2\,(x \neq x' \to j[x] \cap j[x'] \subseteq \alpha_*)$.
$[\because]$ $x = x_\mu$, $x' = x_\nu$, $(\mu > \nu)$ とする．まず，任意の $\eta \geqslant \xi_*$ に対して，$j[x_\mu](\eta)$ は $j[x_\mu]$ と $j[x_\nu]$ の共通元とはなりえない．何となれば，$\eta \geqslant \xi_*$ ならば，任意の $\beta < \gamma_*$ に対して $j[x_\mu](\eta) \geqslant j[x_\mu](\xi_*) > j[x_\nu](\beta)$ である．ここに，“$\geqslant$” は $\eta \geqslant \xi_*$ と記法 $j[\cdot](\cdot)$ の定め方により，“$>$” は列 $\langle x_\mu\colon \mu < \theta\rangle$ の定義による．したがって $\beta < \gamma_*$ が如何に走ろうとも $j[x_\nu](\beta)$ は $j[x_\mu](\eta)$ に一致し得ない．以上の考察より，$j[x_\mu]$ と $j[x_\nu]$ の共通元になり得るのは $j[x_\mu](\eta)\,(\eta < \xi_*)$ の形の元に限られる．式 (5) により，$j[x_\mu] \cap j[x_\nu] \subseteq \alpha_*$.
□(Claim 4)

集合 $S := \{j[x] \cap \alpha_*\colon x \in \mathcal{A}_2\}$ を考える．各 $j[x] \cap \alpha_*$ は α_* の濃度 κ 未満の和集合なので，$S \subseteq [\alpha_*]^{<\kappa}$ が成り立つ．両辺の濃度を計算すると，定理の仮定より $|S| < \theta$．鳩ノ巣論法により，ある集合 $s\,(\subseteq \alpha_*)$ が存

*1 θ が正則でなければ，右辺の sup が θ 以上になり得る．

在して $\mathcal{B} := \{x \in \mathcal{A}_2 \colon j[x] \cap \alpha_* = s\}$ の濃度が θ でなければならない．この $\mathcal{B}$ が Δ-システムであることを見るために，互いに異なる $x, y \in \mathcal{B}$ をとる．$x, y \in \mathcal{A}_2$ なので，Claim 4 より $j[x] \cap j[y] \subseteq \alpha_*$．よって，$j[x] \cap j[y] = (j[x] \cap j[y]) \cap \alpha_* = (j[x] \cap \alpha_*) \cap (j[y] \cap \alpha_*) = s \cap s = s$．いま，$j$ は単射なので $j[x \cap y] = j[x] \cap j[y]$ が成り立つことに注意すれば，結局 $j[x \cap y] = s$．両辺に j^{-1} を作用させ，$x \cap y = j^{-1}[s]$*2．よって $\mathcal{B}$ は $r = j^{-1}[s]$ を根とする Δ-システムである． □

系 3. $\mathcal{A}$ を，有限集合からなる非可算な集合族とする．このとき，非可算な Δ-システム $\mathcal{B}\,(\subseteq \mathcal{A})$ が存在する．

Proof. 定理 2 で $\kappa = \omega$, $\theta = \omega_1$ とせよ． □

参考文献

[1] Devlin, K., *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory* (2nd ed.), Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1993.

[2] Jech, T., *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2002.

[3] Kunen, K., *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, Vol. 102. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1980. 邦訳 [13].

[4] Kunen, K., *The Foundations of Mathematics*, Vol. 19. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2009. 邦訳 [14].

[5] Kunen, K., *Set Theory* (rev. ed.), Vol. 34. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.

[6] Schindler, R., *Set Theory, Exploring Independence and Truth*, Universitext, Springer, 2014.

[7] Shoenfield. J.R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

[8] Takeuti, G. and Zaring, W.M., *Introduction to Axiomatic Set Theory* (2nd ed.), Vol. 1. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1982.

[9] Weaver, N., *Forcing for Mathematicians*, World Scientific Publishing, 2014.

[10] 新井敏康, 数学基礎論, 岩波書店, 2011.

[11] 菊池誠, 不完全性定理, 共立出版, 2014.

[12] 倉田令二朗・篠田寿一, 公理論的集合論, 倉田令二郎監修・数学基礎論シリーズ 2 巻, 河合文化教育研究所, 1996.

[13] K. キューネン（藤田博司訳）, 集合論–独立性証明への案内, 日本評論社, 2008. [3] の邦訳.

[14] K. キューネン（藤田博司訳）, キューネン数学基礎論講義, 日本評論社, 2016. [4] の邦訳.

[15] 田中一之編・著, 数学基礎論講義, 日本評論社, 1997.

[16] 田中一之編, ゲーデルと 20 世紀の論理学 4 集合論とプラトニズム, 東京大学出版会, 2007.

[17] 田中一之・鈴木登志雄, 数学のロジックと集合論, 培風館, 2003.

[18] 田中尚夫, 公理的集合論, 現代数学レクチャーズ (B-10), 培風館, 1982.

[19] 田中尚夫, 選択公理と数学–発生と論争、そして確立への道 (増訂版), 遊星社, 2005.

*2 函数 $f : X \to Y$ が単射であれば，任意の $A \subseteq X$ に対し $f^{-1}[f[A]] = A$.