集合論ノート 0006　$\mathbf{V} = \mathbf{L} \to \mathrm{GCH}$

近藤友祐 (`@elecello_`)

初稿: 2018/02/27
この文書の場所：　`https://elecello.com/works.html`

本稿では，特に断りが無い場合 ZFC で議論する．

定義 1. 集合 x について，その**弱推移閉包** $\mathrm{tcl}(x)$ と**強推移閉包** $\mathrm{trcl}(x)$ を以下に定める：

$$\mathrm{tcl}(x) := \{y \colon y \in^{+} x\} = \{y \colon y \text{ から } x \text{ に至る長さ 1 以上の } \in\text{-道が存在する}\}; \tag{1}$$
$$\mathrm{trcl}(x) := \{y \colon y \in^{*} x\} = \{y \colon y \text{ から } x \text{ に至る長さ 0 以上の } \in\text{-道が存在する}\} = \{x\} \cup \mathrm{tcl}(x). \tag{2}$$

無限基数 κ に対して，

$$H_\kappa := \{x \colon |\mathrm{tcl}(x)| < \kappa\}. \tag{3}$$

以下の補題と事実は証明無しに用いる．

補題 2. x を任意の集合とする．

(1) $\mathrm{tcl}(x)$ は推移的である．
(2) $y \supseteq x$ が推移的ならば $\mathrm{tcl}(x) \subseteq y$.
(3) x が推移的ならば $\mathrm{tcl}(x) = x$.
(4) 集合 y について，$x \in y$ ならば $\mathrm{tcl}(x) \subseteq \mathrm{tcl}(y)$.

事実 3. (1) $\mathrm{ZF} \vdash \mathbf{V} = \mathbf{L} \to \mathrm{AC}$.
(2) $V_\omega = L_\omega = H_\omega$.
(3) $\theta > \aleph_0$ が正則基数ならば $L_\theta \models \mathrm{ZF} - \mathrm{P} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$.
(4) (**下方 Löwenheim-Skolem の定理**) $\mathfrak{B}$ を言語 $\mathcal{L}$ の構造とする．$\max\{|\mathcal{L}|, \aleph_0\} \leqslant \kappa < |B|$ なる基数 κ と $|S| \leqslant \kappa$ なる $S \subseteq B$ を固定する．このとき，$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ で，$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, $S \subseteq A$, $|A| = \kappa$ なるものが存在する．
(5) (**集合版モストフスキ崩壊補題**) 基礎の公理を仮定する．$\langle A, \in\rangle \models$ 外延性公理 ならば，推移的モデル $\langle M, \in\rangle$ が存在し，同型 $\mathrm{mos} \colon \langle A, \in\rangle \cong \langle M, \in\rangle$ が成り立つ．
(6) (5) で，$T \subseteq A$ が推移的ならば $\forall y \in T\,[\mathrm{mos}(y) = y]$.
(7) $\mathfrak{M} \models \mathrm{ZF} - \mathrm{P} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$ が推移的モデルならば，$M = L_{\mathrm{o}(M)}$．ただし $\mathrm{o}(M) := M \cap \mathbf{ON}$.

集合論の言語の文 φ について，$\mathrm{ZF} \vdash \mathbf{V} = \mathbf{L} \to \varphi$ を示すためには，$\mathrm{ZFC} + \mathbf{V} = \mathbf{L} \vdash \varphi$ を示せば十分である．念のためこれを示す．もしも $\mathrm{ZFC} + \mathbf{V} = \mathbf{L} \vdash \varphi$ が示せたら，演繹定理より $\mathrm{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L} \vdash \mathrm{AC} \to \varphi$ である．事実 3 (1) と演繹定理より $\mathrm{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L} \vdash \mathrm{AC}$．二式を合わせて $\mathrm{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L} \vdash \varphi$．演繹定理より $\mathrm{ZF} \vdash \mathbf{V} = \mathbf{L} \to \varphi$.

補題 4. ZF $\vdash \mathbf{V}=\mathbf{L} \to \forall\kappa \geqslant \aleph_0\,(L_\kappa = H_\kappa)$.

Proof. 上述の注意より，ZFC $+\ \mathbf{V}=\mathbf{L} \vdash \forall\kappa \geqslant \aleph_0\,(L_\kappa = H_\kappa)$ を示せば十分である．$\kappa=\aleph_0$ の場合は事実 3 (2) により明らか．以下で $\kappa \geqslant \aleph_1$ の場合について示す．

$\boxed{L_\kappa \subseteq H_\kappa}$ $x \in L_\kappa$ とする．このとき，ある α $(\omega \leqslant \alpha < \kappa)$ が存在して $x \in L_\alpha$．補題 2 (4)(3) と L_α の推移性により $\mathrm{tcl}(x) \subseteq \mathrm{tcl}(L_\alpha) = L_\alpha$．したがって，$|\mathrm{tcl}(x)| \leqslant |L_\alpha| = |\alpha| \leqslant \alpha < \kappa$ [*1]．よって $x \in H_\kappa$．

$\boxed{L_\kappa \supseteq H_\kappa}$ κ が後続基数か極限基数かで場合分けする．

《κ が後続基数の場合》 $\kappa = \lambda^+$ とする．$b \in H_{\lambda^+}$ を仮定して $b \in L_{\lambda^+}$ を示す．$T := \mathrm{trcl}(b) = \{b\} \cup \mathrm{tcl}(b)$ とする．$b \in H_{\lambda^+}$ なので $|\mathrm{tcl}(b)| < \lambda^+$，よって $|T| < \lambda^+$．よって[*2]$|T| \leqslant \lambda$．当然 $T \in \mathbf{V}$ であり，仮定より $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ なので，$T \in \mathbf{L}$．T の $\mathbf{L}$-階数を $\rho(T)$ とする．$\rho(T) < \theta$, $\aleph_0 < \theta$, $\lambda \leqslant \theta$ なる正則基数を勝手に取り固定する．$T \in L_{\rho(T)+1} \subseteq L_\theta$ より $T \in L_\theta$．L_θ の推移性より $T \subseteq L_\theta$．いま，事実 3 より $L_\theta \models \mathrm{ZF}-\mathrm{P}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ である．$\max\{|T|, \aleph_0\} \leqslant \nu \leqslant \lambda \leqslant \theta (= |L_\theta|)$ なる基数 ν を任意に取る[*3]．事実 3 (4) において，$\kappa = \nu$, $\mathfrak{B} = L_\theta = \langle L_\theta, \in \rangle$, $S = T$ として，$\mathfrak{A} \prec L_\theta$, $T \subseteq A$, $|A| = \nu \leqslant \lambda$ なる $\mathfrak{A} = \langle A, \in \rangle$ を得る．$L_\theta \models \mathrm{ZF}-\mathrm{P}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ だったので，$\mathfrak{A} \prec L_\theta$ と合わせて $\mathfrak{A} \models \mathrm{ZF}-\mathrm{P}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$.

さて，$\mathfrak{A} \models$ 外延性公理 であり，更に，外側の基礎の公理より $\in$ は A 上整礎なので，集合版モストフスキ崩壊補題 (事実 3 (5)) により，$\langle A, \in \rangle \cong \langle M, \in \rangle$ なる推移的モデル $\mathfrak{M} = \langle M, \in \rangle$ が存在する．事実 3 (6) により $\forall y \in T\,[\mathrm{mos}(y) = y]$．すると，特に $b \in T$ なので $\mathrm{mos}(b) = b \in M$．また $\langle A, \in \rangle \cong \langle M, \in \rangle$ より $\mathfrak{M} \models \mathrm{ZF}-\mathrm{P}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$．事実 3 (7) により $M = L_{\mathrm{o}(M)}$．よって $|\mathrm{o}(M)| \leqslant |L_{\mathrm{o}(M)}| = |M| = |A| \leqslant \lambda < \lambda^+$．よって $\mathrm{o}(M) < \lambda^+$．よって $b \in M = L_{\mathrm{o}(M)} \subseteq L_{\lambda^+}$．よって $b \in L_{\lambda^+}$．

《κ が極限基数の場合》 $L_\kappa = \bigcup_{\lambda<\kappa} L_{\lambda^+} = \bigcup_{\lambda<\kappa} H_{\lambda^+} = H_\kappa$ によりよい．両端の等号は簡単な計算，中央の等号は先に示した後続基数 λ^+ に関する $L_{\lambda^+} = H_{\lambda^+}$ による． □

定理 5. ZF $\vdash \mathbf{V}=\mathbf{L} \to \mathrm{GCH} \quad (\equiv \forall\lambda \geqslant \omega\,(2^\lambda = \lambda^+))$.

Proof. $\lambda \geqslant \omega$ を任意の基数とする．$\lambda^+ \leqslant 2^\lambda$ は明らか．逆を示すために，$\mathcal{P}(\lambda) \subseteq L_{\lambda^+}$ を示す．$x \in \mathcal{P}(\lambda)$ を勝手に取る．$x \subseteq \lambda$ で λ は推移的だから補題 2 (2) より $\mathrm{tcl}(x) \subseteq \lambda$．よって $|\mathrm{tcl}(x)| \leqslant \lambda < \lambda^+$．よって $x \in H_{\lambda^+}$．補題 4 より $H_{\lambda^+} = L_{\lambda^+}$ なので $x \in L_{\lambda^+}$．以上で $\mathcal{P}(\lambda) \subseteq L_{\lambda^+}$ が示された．両辺の濃度を計算して $2^\lambda \leqslant |L_{\lambda^+}| = \lambda^+$． □

参考文献

[1] Devlin, K., *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory* (2nd ed.), Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1993.

[2] Jech, T., *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2002.

[3] Kunen, K., *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, Vol. 102. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1980. 邦訳 [13].

*1 $\forall\alpha \geqslant \omega (|L_\alpha| = |\alpha|)$.

*2 $\lambda < |T|$ から矛盾させる．λ^+ は λ より真に大きい基数のうち最小のものであり，かつ $|T|$ は λ より大きい基数なので，$\lambda^+ \leqslant |T|$．これは $|T| < \lambda^+$ に反する．

*3 $|T| \leqslant \lambda$ なのでこれは可能である．例えば $\nu = \lambda$ とせよ．

[4] Kunen, K., *The Foundations of Mathematics*, Vol. 19. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2009. 邦訳 [14].

[5] Kunen, K., *Set Theory* (rev. ed.), Vol. 34. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.

[6] Schindler, R., *Set Theory, Exploring Independence and Truth*, Universitext, Springer, 2014.

[7] Shoenfield. J.R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

[8] Takeuti, G. and Zaring, W.M., *Introduction to Axiomatic Set Theory* (2nd ed.), Vol. 1. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1982.

[9] Weaver, N., *Forcing for Mathematicians*, World Scientific Publishing, 2014.

[10] 新井敏康, 数学基礎論, 岩波書店, 2011.

[11] 菊池誠, 不完全性定理, 共立出版, 2014.

[12] 倉田令二朗・篠田寿一, 公理論的集合論, 倉田令二郎監修・数学基礎論シリーズ 2 巻, 河合文化教育研究所, 1996.

[13] K. キューネン（藤田博司訳）, 集合論–独立性証明への案内, 日本評論社, 2008. [3] の邦訳.

[14] K. キューネン（藤田博司訳）, キューネン数学基礎論講義, 日本評論社, 2016. [4] の邦訳.

[15] 田中一之編・著, 数学基礎論講義, 日本評論社, 1997.

[16] 田中一之編, ゲーデルと 20 世紀の論理学 4 集合論とプラトニズム, 東京大学出版会, 2007.

[17] 田中一之・鈴木登志雄, 数学のロジックと集合論, 培風館, 2003.

[18] 田中尚夫, 公理的集合論, 現代数学レクチャーズ (B-10), 培風館, 1982.

[19] 田中尚夫, 選択公理と数学–発生と論争、そして確立への道 (増訂版), 遊星社, 2005.