集合論ノート 0005
モストフスキ崩壊補題 (Mostowski Collapse Lemma)

近藤友祐 (`@elecello_`)

初稿: 2018 年 2 月 22 日　更新: 2019 年 11 月 24 日
この文書の場所：　`https://elecello.com/works.html`

2019 年 11 月 24 日追記：エゴサーチしていたら，5 ちゃんねるのスレッド「現代数学の系譜 工学物理雑談古典ガロア理論も読む 77」にこの文書が引用されているのを見つけました[*1]．この文書を大幅に更新した 2019 年 9 月 16 日の翌日に書き込みがなされていて少し気持ち悪いですが，ただの偶然でしょうか．このスレッドでのやりとり (というか口喧嘩) の内容について特にコメントはしませんが，私はこのスレッドを含め「現代数学の系譜 工学物理雑談 古典ガロア理論も読む」シリーズに書き込んだことは一切ありません．

本稿では，集合論の推移的 $\in$-モデルを作るにあたって重要な，モストフスキ崩壊補題について述べる．

定義 1. $\mathbf{R}$ を，クラス $\mathbf{A} \neq \varnothing$ 上のクラス二項関係とする．すなわち，$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ とする．

(1) $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}$ とする．$y \in \mathbf{X}$ が $\mathbf{X}$ における **R-極小元**であるとは，y が $\forall z \in \mathbf{X}\, \neg[z\,\mathbf{R}\,y]$ を満たすことをいう．以降，混乱の無い場合は，単に**極小元**ともいう．
(2) $\mathbf{R}$ が $\mathbf{A}$ 上**整礎**であるとは，$\mathbf{A}$ の任意の非空部分**集合**が $\mathbf{R}$-極小元をもつことである．
(3) $a \in \mathbf{A}$ に対し，クラス $\mathrm{pred}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}(a) = a{\downarrow}$ を $\{x \in \mathbf{A} \colon x\,\mathbf{R}\,a\}$ で定める．pred の添え字が文脈から明らかな場合，これを省略する．
(4) $\mathbf{R}$ が $\mathbf{A}$ 上 **set-like** であるとは，すべての $a \in \mathbf{A}$ に対して $\mathrm{pred}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}(a)$ が集合となることである．
(5) $\mathbf{R}$ が $\mathbf{A}$ 上**外延的**であるとは，$\forall x, y \in \mathbf{A}(x{\downarrow} = y{\downarrow} \to x = y)$ を満たすことをいう．

次の定理の証明は，集合論ノート 0003 を参照されたい．

定理 2 (整礎クラス上の超限再帰法). クラス二項関係 $\mathbf{R}$ がクラス $\mathbf{A}$ 上整礎であり，かつ set-like であるとする．さらに，論理式 $\forall x, s\, \exists! y\, \varphi(x, s, y)$ が $\mathrm{ZF}^{-} - \mathrm{P}(:= \mathrm{ZF} \setminus \{$ 基礎の公理，冪集合公理 $\})$ を含む公理系 Γ で証明可能であるとし，この y を $\mathbf{G}(x, s)$ で表すことにする．このとき，論理式 $\psi(x, y)$ で，以下が Γ で証明可能であるようなものが存在する．

(i) $\forall x\, \exists! y\, \psi(x, y)$．つまり ψ はクラス函数を定める．この y を $\mathbf{F}(x)$ と書くことにする．
(ii) $\forall a \in \mathbf{A}\, [\mathbf{F}(a) = \mathbf{G}(a, \mathbf{F} \restriction (a{\downarrow}))]$．ただし，$a{\downarrow} = \mathrm{pred}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}(a) = \{x \in \mathbf{A} \colon x\,\mathbf{R}\,a\}$．

さらに，このような $\mathbf{F} \colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ は，$\mathbf{A}, \mathbf{R}, \varphi$ に対して一意的である．

[*1] `https://rio2016.5ch.net/test/read.cgi/math/1568026331` の >>261，>>289，>>339 など．

この定理で $\varphi(x,s,y)$ を "$\forall z\,[z \in y \leftrightarrow (z \in \bigcup\bigcup s \wedge \exists w\langle w,z\rangle \in s)]$" で定めると $\varphi(x,s,y)$ は定理の前件を満たし，$\mathbf{G}(x,s)$ とはまさに $\mathrm{ran}(s)\,(=\{z \in \bigcup\bigcup s : \exists w\langle w,z\rangle \in s\})$ に等しい．定理から一意に定まるクラス函数 $\mathbf{F}$ は，$\mathbf{F}(y) = \mathbf{G}(y, \mathbf{F}\restriction(y\downarrow)) = \mathrm{ran}(\mathbf{F}\restriction(y\downarrow)) = \{\mathbf{F}(x) \colon x \in y\downarrow\}$ を満たす．まとめると，クラス $\mathbf{A}$ とその上の整礎かつ set-like な二項関係 $\mathbf{R}$ が与えられるごとに，任意の $y \in \mathbf{V}$ について $\mathbf{F}(y) = \{\mathbf{F}(x) \colon x \in \mathrm{pred}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}(y)\}$ を満たすようなクラス函数 $\mathbf{F}$ が一意に存在する．我々はこの $\mathbf{F}$ の $\mathbf{A}$ への制限[*2]を $\mathrm{mos}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}$ と名付け，$\mathbf{A},\mathbf{R}$ に関する**モストフスキ崩壊写像**と呼ぶ．添え字 $\mathbf{A},\mathbf{R}$ が明らかなときは，これを省略する．

補題 3. クラス二項関係 $\mathbf{R}$ がクラス $\mathbf{A}$ 上整礎であり，かつ set-like であるならば，$\mathrm{mos}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}``\mathbf{A}$ は推移的クラスである．

Proof. $z \in \mathrm{mos}``\mathbf{A}$ を仮定して $z \subseteq \mathrm{mos}``\mathbf{A}$ を示せばよい．$z \in \mathrm{mos}``\mathbf{A}$ より，ある $b \in \mathbf{A}$ が存在して $z = \mathrm{mos}(b)$ である．$b\downarrow \subseteq \mathbf{A}$ に注意すれば，

$$z = \mathrm{mos}(b) = \{\mathrm{mos}(x) \colon x \in b\downarrow\} \subseteq \{\mathrm{mos}(x) \colon x \in \mathbf{A}\} = \mathrm{mos}``\mathbf{A}. \tag{1}$$

□

補題 4. $\mathbf{A}$ が推移的クラスならば，$\in$ は $\mathbf{A}$ 上外延的である．

Proof. $x, y \in \mathbf{A}$ について $x\downarrow = y\downarrow$ を仮定する．ここに，$x\downarrow = \{u \in \mathbf{A} \colon u \in x\}$ である．$x = y$ を示すために，$x \subseteq y \wedge y \subseteq x$ を示す．$w \in x$ とする．$w \in x \in \mathbf{A}$ と $\mathbf{A}$ の推移性より $w \in \mathbf{A}$．これと $w \in x$ を合わせて $w \in x\downarrow$．仮定 $x\downarrow = y\downarrow$ より $w \in y\downarrow$．これより $w \in y$．$w \in y \to w \in x$ も同様に示せる． □

補題 5. クラス二項関係 $\mathbf{R}$ がクラス $\mathbf{A}$ 上整礎であり，かつ set-like であると仮定する．このとき，

$$\mathrm{mos}_{\mathbf{A},\mathbf{R}} \text{が単射} \iff \mathbf{R} \text{ は } \mathbf{A} \text{ 上外延的}. \tag{2}$$

Proof. $\boxed{(\Rightarrow)}$ 対偶を示す．$\mathbf{R}$ が $\mathbf{A}$ 上外延的でないこと，つまり $\exists x, y \in \mathbf{A}(x\downarrow = y\downarrow \wedge x \neq y)$ を仮定する．このような x, y をとる．このとき，

$$\mathrm{mos}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}(x) = \{\mathrm{mos}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}(u) \colon u \in x\downarrow\} = \{\mathrm{mos}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}(u) \colon u \in y\downarrow\} = \mathrm{mos}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}(y) \tag{3}$$

となり，$\mathrm{mos}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}$ は単射ではない．

$\boxed{(\Leftarrow)}$ $\mathbf{X} := \{a \in \mathbf{A} \colon \exists y \in \mathbf{A}[a \neq y \wedge \mathrm{mos}(a) = \mathrm{mos}(y)]\} = \varnothing$ を示せば十分である．背理法．仮に $\mathbf{X} \neq \varnothing$ であれば，整礎クラス上の超限帰納法 (集合論ノート 0003 参照) によって $\mathbf{X}$ の $\mathbf{R}$-極小元 $a \in \mathbf{X}$ がとれる．$\mathbf{X}$ の定義より，$b \in \mathbf{A}$ で $b \neq a \wedge \mathrm{mos}(b) = \mathrm{mos}(a)$ なるものがとれる．$a \neq b$ と $\mathbf{R}$ の外延性 (の対偶) より，$a\downarrow \neq b\downarrow$．すなわち，$\exists x\,[(x \in a\downarrow \wedge x \notin b\downarrow) \vee (x \in b\downarrow \wedge x \notin a\downarrow)]$．そのような x を c とする．

<u>**Case 1.**</u> $c \in a\downarrow \wedge c \notin b\downarrow$ とする．このとき $c \in \mathbf{A} \wedge c\,\mathbf{R}\,a$，かつ $\neg c\,\mathbf{R}\,b$ である．$c \in a\downarrow$ と $\mathrm{mos}(a) = \mathrm{mos}(b)$ に注意すれば，

$$\mathrm{mos}(c) \in \mathrm{mos}(a) = \mathrm{mos}(b) = \{\mathrm{mos}(z) \colon z \in b\downarrow\} = \{\mathrm{mos}(z) \colon z \in \mathbf{A} \wedge z\,\mathbf{R}\,b\}. \tag{4}$$

[*2] 今後の議論には関係ないが，たとえ $y \notin \mathbf{A}$ であっても等式 $\mathbf{F}(y) = \{\mathbf{F}(x) \colon x \in \mathrm{pred}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}(y)\}$ は満たされることに注意．$y \notin \mathbf{A}$ の場合 $\mathbf{F}(y) = \{\mathbf{F}(x) : x \in \varnothing\} = \varnothing$ となり，エラーのデフォルト値を返している感じでちょっと気持ちが良い．

したがって，ある $d \in \mathbf{A}$, $d \mathbf{R} b$ が存在し，$\mathrm{mos}(c) = \mathrm{mos}(d)$．いま，$\neg c \mathbf{R} b$ なので，$c = d$ ではあり得ない．よって $c \neq d$．よって $d \in \mathbf{A}$ を証人として $c \in \mathbf{X}$．一方 c の選び方より $c \mathbf{R} a$．これは，a の $\mathbf{X}$ における $\mathbf{R}$-極小性に反する．

<u>**Case 2.**</u> $c \in b{\downarrow} \wedge c \notin a{\downarrow}$ とする．上と全く同様に矛盾が導ける． □

定理 6 (**クラス版モストフスキ崩壊補題**)**.** クラス二項関係 $\mathbf{R}$ がクラス $\mathbf{A}$ 上整礎，外延的，かつ set-like であると仮定する．このとき，

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle \cong \langle \mathbf{M}, \in \rangle$$

を満たす推移的クラス $\mathbf{M}$ がただ一つ存在し，さらにこの同型写像もただ一つしかない．

Proof. $\boldsymbol{\pi} := \mathrm{mos}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}$，$\mathbf{M} := \boldsymbol{\pi}``\mathbf{A}$ が所望の同型写像と推移的クラスであることを示す．全射性は $\mathbf{M}$ の定義の仕方から明らか．単射性は前補題による．同型であること，つまり $\forall x, y \in \mathbf{A}\, [x \mathbf{R} y \leftrightarrow \boldsymbol{\pi}(x) \in \boldsymbol{\pi}(y)]$ であることを示す．$(\rightarrow)$ は mos の定義より明らか．$(\leftarrow)$: $\mathrm{mos}(x) \in \mathrm{mos}(y)$ を仮定する．$\mathrm{mos}(x) \in \mathrm{mos}(y) = \{\mathrm{mos}(z) \colon z \in y{\downarrow}\} = \{\mathrm{mos}(z) \colon z \in \mathbf{A} \wedge z \mathbf{R} y\} = \{u : \exists z\, (z \in \mathbf{A} \wedge z \mathbf{R} y \wedge u = \mathrm{mos}(z))\}$ なので，ある $z \in \mathbf{A}$, $z \mathbf{R} y$ が存在し，$\mathrm{mos}(x) = \mathrm{mos}(z)$．mos の単射性より $x = z$．これと $z \mathbf{R} y$ を合わせて $x \mathbf{R} y$．推移性は補題 3 による．最後に一意性を示す．$\boldsymbol{\rho} \colon \langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle \cong \langle \mathbf{N}, \in \rangle$ なる推移的クラス $\mathbf{N}$ と同型写像 $\boldsymbol{\rho}$ が与えられたとして $\mathbf{N} = \mathbf{M}$, $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\pi}$ であることを示せばよい．$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\pi}$ を示す．まず，$\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\pi}^{-1} \colon \langle \mathbf{M}, \in \rangle \cong \langle \mathbf{N}, \in \rangle$ と定め，$\in$-帰納法により，任意の $x \in \mathbf{M}$ に対して $\boldsymbol{\sigma}(x) = x \cdots (*)$ であることを示す．$(\subseteq)$: $z \in \boldsymbol{\sigma}(x)$ を任意にとる．$z \in \boldsymbol{\sigma}(x) \in \mathbf{N}$ と $\mathbf{N}$ の推移性より $z \in \mathbf{N}$ である．$\boldsymbol{\sigma}$ の全射性より，$z = \boldsymbol{\sigma}(w)$ となる $w \in \mathbf{M}$ が存在する．$\boldsymbol{\sigma}(w) (= z) \in \boldsymbol{\sigma}(x)$ なので，同型性より $w \in x$ である．帰納法の仮定より $\boldsymbol{\sigma}(w) = w$ である．よって $z = \boldsymbol{\sigma}(w) = w \in x$ となり，$z \in x$ が示せた．$(\supseteq)$: $z \in x$ とすれば，帰納法の仮定により $\boldsymbol{\sigma}(z) = z$ である．また同型性より $\boldsymbol{\sigma}(z) \in \boldsymbol{\sigma}(x)$ である．よって $z = \boldsymbol{\sigma}(z) \in \boldsymbol{\sigma}(x)$ となりよい．以上で $(*)$ が示せた．したがって $\mathbf{N} = \boldsymbol{\sigma}``\mathbf{M} = \mathbf{M}$ であり，任意の $a \in \mathbf{A}$ に対し $\boldsymbol{\rho}(a) = \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\pi}^{-1}(\boldsymbol{\pi}(a)) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\pi}(a)) = \boldsymbol{\pi}(a)$ となり，$\mathbf{N} = \mathbf{M}$ および $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\pi}$ が示せた． □

系 7 (**集合版モストフスキ崩壊補題**)**.** 二項関係 R が集合 A 上整礎かつ外延的であると仮定する．このとき，$\langle A, R \rangle \cong \langle M, \in \rangle$ を満たす推移的集合 M がただ一つ存在する．

Proof. Set-like 性を言えばよい．任意の $a \in A$ に対し $\mathrm{pred}_{A,R}(a) = \{x \in A : x R a\} \subseteq A$ なのでよい． □

次の系は，例えば強制法において ZFC の十分大きな部分を満たす可算推移モデルをとって云々する流儀において有用である．反映原理で ZFC のデカい部分のモデルをとり，レーヴェンハイム=スコーレムでサイズを可算に落とし，モストフスキで潰して推移的にし，ラショーヴァ=シコルスキの補題でジェネリックフィルターをとる，という流れは必殺技のコンボっぽくてカッコいい．

系 8 (**$\in$-モデルに関するモストフスキ崩壊補題**)**.** 基礎の公理を仮定する．$\langle A, \in \rangle \models$ 外延性公理 ならば，同型 $\langle A, \in \rangle \cong \langle M, \in \rangle$ を成り立たせる**推移的**集合 M が唯一つ存在する．

Proof. 外側の基礎の公理より $\in$ は A 上整礎である．$\langle A, \in \rangle \models$ 外延性公理 より $\in$ は A 上外延的である．そのため集合版モストフスキ崩壊補題が適用可能である． □

次のような応用も考えられる：

系 9. 任意の整列集合に対し，それと順序同型な順序数が一意に存在する．したがって整列集合 $\langle X, < \rangle$ の**順序型** $\mathrm{type}(X, <)$ を，"$\langle X, < \rangle$ と順序同型な唯一の順序数" として定めることができる．

Proof. $\langle X, < \rangle$ を (狭義全順序 $<$ による) 整列集合とする．整列順序が整礎なのは明らか (全順序においては極小元と最小元の概念は一致する)．外延性の対偶，すなわち $\forall a, b \in X (a \neq b \to \mathrm{pred}_{X,<}(a) \neq \mathrm{pred}_{X,<}(b))$ を示す．$a, b \in X$ を任意にとる．もし $a \neq b$ なら全順序性より $a < b$ または $b < a$ であるが，$a < b$ なら $a \notin \mathrm{pred}_{X,<}(a)$ だが $a \in \mathrm{pred}_{X,<}(b)$ なので $\mathrm{pred}_{X,<}(a) \neq \mathrm{pred}_{X,<}(b)$ である．$b < a$ の場合も同様．集合版モストフスキ崩壊補題より，$\langle X, < \rangle \cong \langle Y, \in \rangle$ なるただ一つの推移的集合 Y が取れる．同型性より Y は $\in$ で整列される．つまり Y は $\in$ で整列される推移的集合，すなわち順序数である． □

参考文献

[1] Devlin, K., *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory* (2nd ed.), Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1993.

[2] Jech, T., *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2002.

[3] Kunen, K., *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, Vol. 102. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1980. 邦訳 [13].

[4] Kunen, K., *The Foundations of Mathematics*, Vol. 19. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2009. 邦訳 [14].

[5] Kunen, K., *Set Theory* (rev. ed.), Vol. 34. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.

[6] Schindler, R., *Set Theory, Exploring Independence and Truth*, Universitext, Springer, 2014.

[7] Shoenfield. J.R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

[8] Takeuti, G. and Zaring, W.M., *Introduction to Axiomatic Set Theory* (2nd ed.), Vol. 1. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1982.

[9] Weaver, N., *Forcing for Mathematicians*, World Scientific Publishing, 2014.

[10] 新井敏康, 数学基礎論, 岩波書店, 2011.

[11] 菊池誠, 不完全性定理, 共立出版, 2014.

[12] 倉田令二朗・篠田寿一, 公理論的集合論, 倉田令二郎監修・数学基礎論シリーズ 2 巻, 河合文化教育研究所, 1996.

[13] K. キューネン（藤田博司訳）, 集合論–独立性証明への案内, 日本評論社, 2008. [3] の邦訳.

[14] K. キューネン（藤田博司訳）, キューネン数学基礎論講義, 日本評論社, 2016. [4] の邦訳.

[15] 田中一之編・著, 数学基礎論講義, 日本評論社, 1997.

[16] 田中一之編, ゲーデルと 20 世紀の論理学 4 集合論とプラトニズム, 東京大学出版会, 2007.

[17] 田中一之・鈴木登志雄, 数学のロジックと集合論, 培風館, 2003.

[18] 田中尚夫, 公理的集合論, 現代数学レクチャーズ (B-10), 培風館, 1982.

[19] 田中尚夫, 選択公理と数学–発生と論争、そして確立への道 (増訂版), 遊星社, 2005.