集合論ノート 0003　整礎クラス上の超限帰納法と超限再帰法

近藤友祐 (`@elecello_`)

初稿: 2017/09/05
この文書の場所： `https://elecello.com/works.html`

集合論では，帰納法によって定理を示したり，再帰的に函数を定義することがしばしば行われる．本稿では，そのような方法のうち最も強力な形である，整礎クラス上の超限帰納法と超限再帰法について述べる．これを明らかにしておけば，例えば，**ON** は整列クラスゆえに整礎クラスだから，**ON** 上の超限帰納法や超限再帰法が正当化される．また，メタ数学的な注意を払った上で，整礎集合や整列集合上の超限帰納法や超限再帰法も正当化される．

本稿では，特に断りがない場合，太字のアルファベットはクラスやクラス函数などを表すものとする．本稿と参考文献を比較して，同じ記法を異なる意味で用いる場面がある．参考文献を参照するときには，このことを注意されたい．

定義 1. $\mathbf{R}$ を，クラス $\mathbf{A}$ 上のクラス二項関係とする．すなわち，$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ とする．

(1) $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}$ とする．$y \in \mathbf{X}$ が **R-極小元**であるとは，y が $\neg\exists z \in \mathbf{X}\,[z\,\mathbf{R}\,y]$ を満たすことである．以降，混乱の無い場合は，単に**極小元**ともいう．

(2) $\mathbf{R}$ が $\mathbf{A}$ 上**整礎**であるとは，$\mathbf{A}$ の任意の非空部分**集合**が $\mathbf{R}$-極小元をもつことである．

(3) $a \in \mathbf{A}$ に対し，クラス $\mathrm{pred}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}(a) = a{\downarrow}$ を $\{x \in \mathbf{A} \colon x\,\mathbf{R}\,a\}$ で定める．pred の添え字が文脈から明らかな場合，これを省略する．

(4) $\mathbf{R}$ が $\mathbf{A}$ 上 **set-like** であるとは，すべての $a \in \mathbf{A}$ に対して $\mathrm{pred}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}(a)$ が集合となることである．

(5) s が長さ n の **R-道** (あるいは単に**道**) であるとは，$1 \leqslant n < \omega$ で，$\mathrm{dom}\, s = n+1$, $\mathrm{ran}\, s \subseteq \mathbf{A}$ であり，$\forall j < n\,[s_j\,\mathbf{R}\,s_{j+1}]$ を満たすことをいう．この s は s_0 **から** s_n **への長さ** n **の道**と呼ばれる．これを $s_0 \overset{\mathbf{R}^n}{\dashrightarrow} s_n$ と記す．

(6) $s_0 \in \mathbf{A}$ に対し，s_0 から $\mathbf{R}$ を 0 ステップ進み s_0 へ到達すると考え，これを長さ 0 の $\mathbf{R}$-道とする．

(7) クラス二項関係 $\mathbf{R}^+ \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ を，$x\,\mathbf{R}^+ y \leftrightarrow$ “x から y への長さ 1 以上の道が存在する” で定める．

(8) クラス二項関係 $\mathbf{R}^* \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ を，$x\,\mathbf{R}^* y \leftrightarrow$ “x から y への長さ 0 以上の道が存在する” で定める．

(9) 論理式 “$u \in \mathbf{A}$ から $a \in \mathbf{A}$ への長さ $n \in \omega$ の $\mathbf{R}$-道が存在する” を $\mathtt{ExistsPath}(u, a, n)$ で表す．

整礎クラスに対する超限帰納法の証明の中で，推移的閉包を構成する．この構成は，自然数上の再帰によって行われる．超限再帰法を根拠づけるのに再帰を用いるのは循環論法ではないか？と思われるが，事前に順序数論を展開し，自然数全体を有限順序数全体として定義しておくと，ω の上で帰納法，再帰法が使えることがわかる．

補題 2 (自然数上の数学的帰納法)**.** $\theta(x)$ を論理式とする．このとき，

$$[\theta(0) \land \forall n \in \omega\,(\theta(n) \to \theta(n+1))] \to \forall n \in \omega\,\theta(n).$$

Proof. 左辺を仮定する．右辺の否定 (i.e. $\exists n \in \omega\,\neg\theta(n)$) を仮定すると矛盾することを示す．いま，$S := \{n \in \omega \colon \neg\theta(n)\} \neq \varnothing$．よって $n_0 = \min S \in \omega$ がとれる．$n_0 \in \omega$, $\neg\theta(n_0)$ である．仮定より $\theta(0)$ なので，$n_0 = 0$ ではあり得ない．$n_0 = m+1$ だったとする．n_0 の最小性より $m \notin S$．つまり $m \notin \omega \lor \theta(m)$ だが，明らかに $m \in \omega$ なので[*1]，$\theta(m)$．仮定より $\theta(m+1)$ つまり $\theta(n_0)$ となるが，これは $\neg\theta(n_0)$ に矛盾．したがって，$n_0 \in \omega$ が 0 だとしても後続数であるとしても矛盾する．よって，$\forall n \in \omega\,\theta(n)$. □

補題 3. $\mathbf{R}$ をクラス $\mathbf{A}$ 上の set-like なクラス二項関係とし，$a \in \mathbf{A}$ を固定する．論理式 $\varphi(n, y)$[*2] を

$$\forall u\,[u \in y \leftrightarrow \mathtt{ExistsPath}(u, a, n)]$$

で定めたとき，$\forall n \in \omega\,\exists! y\,\varphi(n, y)$.

Proof. $n \in \omega$ に関する数学的帰納法によって $\forall n \in \omega\,\exists! y\,\varphi(n, y)$ を示す．つまり，

$$\exists! y\,\varphi(0, y) \land \forall n \in \omega(\exists! y\,\varphi(n, y) \to \exists! y'\,\varphi(n+1, y'))$$

を示せばよい．

$n = 0$ について，$y = \{a\}$ とすれば，これは明らかに $\varphi(0, y)$ を満たす唯一の y である．

n で成立していると仮定する．つまり，$\exists! y\,\varphi(n, y)$ を仮定する．このとき，この y について

$$\forall u\,[u \in y \leftrightarrow \mathtt{ExistsPath}(u, a, n)] \tag{1}$$

である．この y に対し，$y' = \bigcup_{z \in y} \mathrm{pred}_{\mathbf{R}}(z)$ と定める．各 $\mathrm{pred}_{\mathbf{R}}(z)$ は，$\mathbf{R}$ が set-like であることから集合である．よって，置換公理と和集合公理により y' は集合である．この y' について $\varphi(n+1, y')$，つまり

$$\forall u'\,[u' \in y' \leftrightarrow \mathtt{ExistsPath}(u', a, n+1)] \tag{2}$$

であることを検証する．u' を任意にとる．

$\boxed{(\to)}$ $u' \in y'$ とする．y' の定義より，ある $z \in y$ が存在して $u' \in \mathrm{pred}_{\mathbf{R}}(z)$，よって $u'\,\mathbf{R}\,z$．$z \in y$ と帰納法の仮定 (式 (1),→) より $\mathtt{ExistsPath}(z, a, n)$ となる．$u' \xrightarrow{\mathbf{R}} z \xrightarrow{\mathbf{R}^n} a$ より，$\mathtt{ExistsPath}(u', a, n+1)$ である．

$\boxed{(\leftarrow)}$ u' から a への長さ $n+1$ の道 p が存在する．これを $p\colon u' \xrightarrow{\mathbf{R}} z \xrightarrow{\mathbf{R}^n} a$ と分解する．すると $\mathtt{ExistsPath}(z, a, n)$．すると，帰納法の仮定 (式 (1),←) より $z \in y$．また $u'\,\mathbf{R}\,z$ より $u' \in \mathrm{pred}_{\mathbf{R}}(z)$ である．以上より $\exists z \in y\,[u' \in \mathrm{pred}_{\mathbf{R}}(z)]$．つまり $u' \in y'$.

y' の一意性について．$\varphi(n+1, y'_1) \land \varphi(n+1, y'_2)$ ならば $\forall u'\,[u' \in y'_1 \leftrightarrow \mathtt{ExistsPath}(u', a, n+1)] \land \forall u'\,[u' \in y'_2 \leftrightarrow \mathtt{ExistsPath}(u', a, n+1)]$ である．このことから $\forall u'\,[u' \in y'_1 \leftrightarrow u' \in y'_2]$．外延性公理から $y'_1 = y'_2$.

したがって $\exists! y'\,\varphi(n+1, y')$. □

[*1] 任意の $k \in \omega$, $k \geq 1$ に対し，その前者 $k-1 \in \omega$ が存在することを示せる．このことの証明は本稿では省略し，別の機会に譲る．

[*2] 気持ちとしては，$\varphi(n, y) \leftrightarrow$ “y は a の n 代目の子孫全体”.

上補題において，各 $n \in \omega$ に対して一意に定まる集合 y を D_n^a と書こう．すると，置換公理より $\{D_n^a \colon n \in \omega\}$ は集合であり，和集合公理により $d_a := \bigcup_{n \in \omega} D_n^a$ は集合である．D_n^a は丁度 n ステップで a にたどり着ける $\mathbf{A}$ の元全体で，d_a は有限ステップで a にたどり着ける $\mathbf{A}$ の元全体，すなわち $\mathrm{pred}_{\mathbf{A},\mathbf{R}^*}(a)$ に等しい．

定理 4 (**整礎クラス上の超限帰納法**)**.** クラス二項関係 $\mathbf{R}$ がクラス $\mathbf{A}$ 上整礎であり，かつ set-like であるとする．このとき，$\mathbf{A}$ の任意の空でない部分クラス $\mathbf{X}$ は $\mathbf{R}$-極小元をもつ．

Proof. $\mathbf{X}$ は空でないので，元 $a \in \mathbf{X}$ がとれる．上の記号法のもと，$X = d_a \cap \mathbf{X}$ を考える．d_a が集合なので X は集合である．さらに，$a \in X$ なので X は $\mathbf{A}$ の空でない部分集合である．よって，$\mathbf{R}$ の整礎性より，X の $\mathbf{R}$-極小元 $b \in X$ がとれる．この b が $\mathbf{X}$ の極小元にもなっていること，すなわち $\neg\exists u \in \mathbf{X}\,[u\,\mathbf{R}\,b]$ を示す．背理法．$\exists u \in \mathbf{X}\,[u\,\mathbf{R}\,b]$ と仮定して矛盾を導く．このような u を取る．今，$u \xrightarrow{\mathbf{R}} b \xrightarrow{\mathbf{R}^*} a$ なので $u \xrightarrow{\mathbf{R}^*} a$．よって $u \in d_a$．さらに u の取り方より $u \in \mathbf{X}$．よって $u \in d_a \cap \mathbf{X} = X$．$u \in X$ で $u\,\mathbf{R}\,b$ であるから，これは b の X における $\mathbf{R}$-極小性に反する． □

定理 5 (**整礎クラス上の超限再帰法**)**.** クラス二項関係 $\mathbf{R}$ がクラス $\mathbf{A}$ 上整礎であり，かつ set-like であるとする．さらに，論理式 $\forall x, s\,\exists! y\,\varphi(x,s,y)$ が $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$[*3] を含む公理系 Γ で証明可能であるとし，この y を $\mathbf{G}(x,s)$ で表すことにする．このとき，論理式 $\psi(x,y)$ で，以下が Γ で証明可能であるようなものが存在する．

(i) $\forall x\,\exists! y\,\psi(x,y)$．つまり ψ はクラス函数を定める．この y を $\mathbf{F}(x)$ と書くことにする．

(ii) $\forall a \in \mathbf{A}\,[\mathbf{F}(a) = \mathbf{G}(a, \mathbf{F}{\restriction}(a{\downarrow}))]$．ただし，$a{\downarrow} = \mathrm{pred}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}(a) = \{x \in \mathbf{A} \colon x\,\mathbf{R}\,a\}$．

さらに，このような $\mathbf{F} \colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ は，$\mathbf{A}, \mathbf{R}, \varphi$ に対して一意的である．

Proof. 論理式 $\mathrm{App}(d,h)$ を以下に定義する[*4]：

$$\mathrm{App}(d,h) \;\leftrightarrow\; (h\,\text{は函数}) \wedge (\mathrm{dom}\,h = d \subseteq \mathbf{A}) \wedge (\forall y \in d\,[y{\downarrow} \subseteq d]) \wedge (\forall y \in d\,[h(y) = \mathbf{G}(y, h{\restriction}(y{\downarrow}))]). \quad (3)$$

Claim 1 $\forall d, d', h, h'\,[\mathrm{App}(d,h) \wedge \mathrm{App}(d',h') \to \mathrm{App}(d \cap d', h \cap h')]$.

[∵] 仮定 $\mathrm{App}(d,h) \wedge \mathrm{App}(d',h')$ のもと，$\mathrm{App}(d \cap d', h \cap h')$，つまり (i) $h \cap h'$ は函数，(ii) $\mathrm{dom}(h \cap h') = d \cap d'$，(iii) $\forall y \in d \cap d'\,[y{\downarrow} \subseteq d \cap d']$，(iv) $\forall y \in d \cap d'\,[(h \cap h')(y) = \mathbf{G}(y, (h \cap h'){\restriction}(y{\downarrow}))]$ の四点を示せばよい．

<u>(iii):</u> $\forall y \in d \cap d'\,[y{\downarrow} \subseteq d \cap d']$ を示す．$y \in d \cap d'$ とする．$y \in d$ と $\mathrm{App}(d,h)$ より，$y{\downarrow} \subseteq d$．同じく $y \in d'$ と $\mathrm{App}(d',h')$ より，$y{\downarrow} \subseteq d'$．よって $y{\downarrow} \subseteq d \cap d'$．

<u>(i),(ii):</u> $Y := \{y \in d \cap d' (\subseteq \mathbf{A}) \colon h(y) \neq h'(y)\}$ とおく．Y が空であることを示す．背理法．仮に $Y \neq \varnothing$ なら，$\mathbf{R}$-極小元 $y_0 \in Y$ が存在する．$y_0 \in d$ と $\mathrm{App}(d,h)$ より $h(y_0) = \mathbf{G}(y_0, h{\restriction}(y_0{\downarrow}))$，$y_0 \in d'$ と $\mathrm{App}(d',h')$ より $h'(y_0) = \mathbf{G}(y_0, h'{\restriction}(y_0{\downarrow}))$ である．さらに，y_0 の極小性より $\mathbf{G}(y_0, h{\restriction}(y_0{\downarrow})) = \mathbf{G}(y_0, h'{\restriction}(y_0{\downarrow}))$ である[*5]．したがって $h(y_0) = h'(y_0)$ となるが，これは $y_0 \in Y$ と矛盾．したがって Y は空である．よって $\forall y \in d \cap d'\,[h(y) = h'(y)]$ であり，$h \cap h'$ は $d \cap d'$ 上の函数で

[*3] $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P} = \mathrm{ZF} \setminus \{$ 基礎の公理，冪集合公理 $\}$

[*4] 後に $\mathrm{App}(d,h) \leftrightarrow h = \mathbf{F}{\restriction}d$ であることが判明する．

[*5] $h{\restriction}(y_0{\downarrow}) = h'{\restriction}(y_0{\downarrow})$ を示せばよい．$(\subseteq)$：$\langle u, v\rangle \in h{\restriction}(y_0{\downarrow})$ とする．$u \in y_0{\downarrow} \wedge h(u) = v$ である．このとき，$u \in y_0{\downarrow}$ と $y_0{\downarrow} \subseteq d \cap d' = \mathrm{dom}\,h \cap \mathrm{dom}\,h'$ より，$h(u), h'(u)$ は共に定義されている．y_0 の $\mathbf{R}$-極小性より $u \notin Y$ なので，$h(u) = h'(u)$．よって，$u \in y_0{\downarrow} \wedge h'(u) = v$，つまり，$\langle u, v\rangle \in h'{\restriction}(y_0{\downarrow})$．$(\supseteq)$ も同様に示せる．

ある[*6].

<u>(iv):</u> 任意の $y \in d \cap d'$ について $h{\restriction}(y{\downarrow}) = (h \cap h'){\restriction}(y{\downarrow})$ である[*7]から，$\mathrm{App}(d,h)$ を用いて任意の $y \in d \cap d'$ について $(h \cap h')(y) = h(y) = \mathbf{G}(y, h{\restriction}(y{\downarrow})) = \mathbf{G}(y, (h \cap h'){\restriction}(y{\downarrow}))$. □(Claim 1)

論理式 $\psi(x,y)$ を以下に定義する：

$$\begin{aligned}\psi(x,y) \ \leftrightarrow\ & [x \notin \mathbf{A} \wedge y = \varnothing] \vee \\ & [x \in \mathbf{A} \wedge \exists d, h(\mathrm{App}(d,h) \wedge x \in d \wedge h(x) = y)].\end{aligned} \tag{4}$$

この ψ が求めるものであることを示す．

まず，定理の条件式 (i) について．条件式 (i) を書き下すと，

$$\forall x \left[\underbrace{\exists y\, \psi(x,y)}_{\text{(E)}} \wedge \underbrace{\forall s,t\,(\psi(x,s) \wedge \psi(x,t) \rightarrow s = t)}_{\text{(U)}} \right] \tag{5}$$

である．$x = x_0$ を任意に固定し，(E) と (U) を示す．

$\boxed{\text{(U)}}$ 背理法．(U) の否定 $\exists s,t\,(\psi(x_0,s) \wedge \psi(x_0,t) \wedge s \neq t)$ を仮定する．そのような s,t を固定する．$\psi(x_0,s) \wedge \psi(x_0,t)$ を書き下すと，

$$\begin{aligned}&\left\{ \overbrace{[x_0 \notin \mathbf{A} \wedge s = \varnothing]}^{\text{(S1)}} \vee \overbrace{[x_0 \in \mathbf{A} \wedge \exists d, h(\mathrm{App}(d,h) \wedge x_0 \in d \wedge h(x_0) = s)]}^{\text{(S2)}} \right\} \\ \wedge &\left\{ \underbrace{[x_0 \notin \mathbf{A} \wedge t = \varnothing]}_{\text{(T1)}} \vee \underbrace{[x_0 \in \mathbf{A} \wedge \exists d', h'(\mathrm{App}(d',h') \wedge x_0 \in d' \wedge h'(x_0) = t)]}_{\text{(T2)}} \right\}\end{aligned} \tag{6}$$

である．したがって，$[\text{(S1)} \wedge \text{(T1)}] \vee [\text{(S1)} \wedge \text{(T2)}] \vee [\text{(S2)} \wedge \text{(T1)}] \vee [\text{(S2)} \wedge \text{(T2)}]$ である．$[\text{(S1)} \wedge \text{(T1)}]$ のとき，$s = t = 0$ となり $s \neq t$ に矛盾．$[\text{(S1)} \wedge \text{(T2)}]$ のとき，$x_0 \notin \mathbf{A} \wedge x_0 \in \mathbf{A}$ となり矛盾．$[\text{(S2)} \wedge \text{(T1)}]$ のとき，$x_0 \in \mathbf{A} \wedge x_0 \notin \mathbf{A}$ となり矛盾．$[\text{(S2)} \wedge \text{(T2)}]$ のとき，そのような d, d', h, h' をとる．$\mathrm{App}(d,h) \wedge \mathrm{App}(d',h')$ なので Claim 1 より $\mathrm{App}(d \cap d', h \cap h')$．いま，$x_0 \in d \cap d' = \mathrm{dom}\,(h \cap h')$ であるから，$s = h(x_0) = (h \cap h')(x_0) = h'(x_0) = t$ より $s = t$ を得る．これは $s \neq t$ に矛盾．いずれの場合も矛盾である．

$\boxed{\text{(E)}}$ まず

$$\forall u \in \mathbf{A}\, \exists d, h\, [\mathrm{App}(d,h) \wedge u \in d] \tag{7}$$

[*6] すべての $u \in \mathrm{dom}(h \cap h')$ に対し，ただ一つの v が存在して $\langle u,v \rangle \in h \cap h'$ であることを示せばよい．まず $\mathrm{dom}(h \cap h') = d \cap d'$ を示す．$(\subseteq)$: $u \in \mathrm{dom}(h \cap h')$ とする．ある v が存在して $\langle u,v \rangle \in h \cap h'$ である．よって $\langle u,v \rangle \in h$ かつ $\langle u,v \rangle \in h'$ である．これより $u \in \mathrm{dom}\,h = d$ かつ $u \in \mathrm{dom}\,h' = d'$ となり，$u \in d \cap d'$ である．$(\supseteq)$: $u \in d \cap d'$ とする．$u \in \mathrm{dom}\,h$ かつ $u \in \mathrm{dom}\,h'$ であるから，ある v_1, v_2 が存在して $\langle u,v_1 \rangle \in h$ かつ $\langle u,v_2 \rangle \in h'$ である．ここで，$u \in d \cap d'$ なので，$\forall y \in d \cap d'\,[h(y) = h'(y)]$ より，ただ一つの v_0 が存在して $\langle u,v_0 \rangle \in h$ かつ $\langle u,v_0 \rangle \in h'$．$\langle u,v_1 \rangle, \langle u,v_0 \rangle \in h$ と v_0 の u に対する一意性より $v_1 = v_0$．同様に，$\langle u,v_2 \rangle, \langle u,v_0 \rangle \in h'$ と v_0 の u に対する一意性より $v_2 = v_0$．よって $v_1 = v_2 = v_0$．よって $\langle u,v_0 \rangle \in h \cap h'$．よって $\exists v\,[\langle u,v \rangle \in h \cap h']$，つまり $u \in \mathrm{dom}(h \cap h')$ を得る．この準備のもとで文頭のことを示す．$u \in \mathrm{dom}(h \cap h')$ を仮定する．$u \in d \cap d'$ であるから，$\forall y \in d \cap d'\,[h(y) = h'(y)]$ より，$h(u) = h'(u)$．この値を v とおけば，これが求めるものである．一意性を示す．もしも $\langle u,w \rangle \in h$ であれば，$\langle u,v \rangle, \langle u,w \rangle \in h$ となり，v の u に対する一意性より $w = v$ である．

[*7] 両向きの包含関係を示す．$(\subseteq)$: $\langle u,v \rangle \in h{\restriction}(y{\downarrow})$ とする．$u \in y{\downarrow}$ かつ $v = h(u)$ である．$y{\downarrow} \subseteq d \cap d'$ より $u \in y{\downarrow} \subseteq d \cap d'$，よって $v = h(u) = (h \cap h')(u)$ である．よって $u \in y{\downarrow}$ かつ $v = (h \cap h')(u)$，つまり $\langle u,v \rangle \in (h \cap h'){\restriction}(y{\downarrow})$．$(\supseteq)$: $\langle u,v \rangle \in (h \cap h'){\restriction}(y{\downarrow})$ とする．$u \in y{\downarrow}$ かつ $v = (h \cap h')(u)$ である．$y{\downarrow} \subseteq d \cap d'$ より $u \in y{\downarrow} \subseteq d \cap d'$，よって $v = (h \cap h')(u) = h(u)$ である．よって $u \in y{\downarrow}$ かつ $v = h(u)$，つまり $\langle u,v \rangle \in h{\restriction}(y{\downarrow})$．

を示す．

Claim 2　$\forall u \in \mathbf{A} \forall d, h\,[(\mathrm{App}(d,h) \wedge u \in d) \to \mathrm{App}(d_u, h_u)]$．但し，$d_u := \mathrm{pred}_{\mathbf{A},\mathbf{R}^*}(u)$, $h_u := h \restriction d_u$．

[$\because$] 仮定 $\mathrm{App}(d,h) \wedge u \in d$ のもと，$\mathrm{App}(d_u,h_u)$，つまり (i) h_u は函数，(ii) $\mathrm{dom}\, h_u = d_u$，(iii) $\forall y \in d_u\,[y{\downarrow} \subseteq d_u]$，(iv) $\forall y \in d_u\,[h_u(y) = \mathbf{G}(y, h_u \restriction (y{\downarrow}))]$ の四点を示せばよい．

<u>(i),(ii):</u> いま，$d_u \subseteq d$ である ($\because$ $\mathrm{pred}_{\mathbf{A},\mathbf{R}^*}(u) \subseteq d$ を示せばよい．$s \in \mathrm{pred}_{\mathbf{A},\mathbf{R}^*}(u)$ とする．$s = u$ なら仮定 $u \in d$ より $s \in d$ となるのでよい．$s \overset{\mathbf{R}^+}{\dashrightarrow} u$ のとき，

$$s \overset{\mathbf{R}}{\dashrightarrow} s_k \overset{\mathbf{R}}{\dashrightarrow} s_{k-1} \overset{\mathbf{R}}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\mathbf{R}}{\dashrightarrow} s_1 \overset{\mathbf{R}}{\dashrightarrow} s_0 \overset{\mathbf{R}}{\dashrightarrow} u \in d$$

となっている．$\mathrm{App}(d,h)$ より $\forall y \in d\,[y{\downarrow} \subseteq d]$ である．特に $y = u \in d$ とおくと $u{\downarrow} \subseteq d$．$s_0 \in u{\downarrow}$ なので $s_0 \in d$．再び $y = s_0 \in d$ とおくと $s_0{\downarrow} \subseteq d$．$s_1 \in s_0{\downarrow}$ なので $s_1 \in d$．これを繰り返し，$s \in d$ を得る)．いま，$\mathrm{App}(d,h)$ なので h は $d \subseteq \mathbf{A}$ 上で定義された函数である．したがって，部分集合 $d_u \subseteq d$ への制限 $h_u = h \restriction d_u$ は，$d_u \subseteq \mathbf{A}$ 上の関数である．

<u>(iii):</u> $\forall y \in d_u\,[y{\downarrow} \subseteq d_u]$ を示す．$y \in d_u$ とする．$y\,\mathbf{R}^* u$ である．$z \in y{\downarrow}$ を勝手にとる．$z\,\mathbf{R}\,y$ である．$z\,\mathbf{R}\,y\,\mathbf{R}^* u$ より $z\,\mathbf{R}^* u$ である．よって $z \in d_u$．よって $y{\downarrow} \subseteq d_u$．

<u>(iv):</u> 背理法．(iv) が偽なら $Y = \{y \in d_u (\subseteq \mathbf{A}) \colon h_u(y) \neq \mathbf{G}(y, h_u \restriction (y{\downarrow}))\} \neq \varnothing$ である．よって $\mathbf{R}$-極小元 $y_0 \in Y$ が存在する．この $y_0 \in d_u$ について，$h_u(y_0) = h(y_0) = \mathbf{G}(y_0, h \restriction (y_0{\downarrow})) = \mathbf{G}(y_0, h_u \restriction (y_0{\downarrow}))$ である．ここで，左右の等号は h_u が h の制限に過ぎないこと，中央の等号は $\mathrm{App}(d,h)$ より $\forall y \in d\,[h(y) = \mathbf{G}(y, h \restriction (y{\downarrow}))]$ であることによる．よって $h_u(y_0) = \mathbf{G}(y_0, h_u \restriction (y_0{\downarrow}))$ だが，$y_0 \in Y$ より $h_u(y_0) \neq \mathbf{G}(y_0, h_u \restriction (y_0{\downarrow}))$ なので矛盾である．　□(Claim 2)

$\mathbf{A}$ の部分クラス $\mathbf{X}$ を，$\mathbf{X} = \{x \in \mathbf{A} \colon \neg\exists d, h\,[\mathrm{App}(d,h) \wedge x \in d]\}$ と定義する．

Claim 3　任意の $u \notin \mathbf{X}, u \in \mathbf{A}$ に対し，$\mathrm{App}(d_u, h_u)$ なる h_u が u に対して一意に存在する．

[$\because$] $\mathbf{A} \ni u \notin \mathbf{X}$ より, ある d, h が存在して $\mathrm{App}(d,h) \wedge u \in d$. Claim 2 より，$\mathrm{App}(d_u,h_u)$．一意性を示す．$\mathrm{dom}\, i_u = d_u$ なる i_u が $\mathrm{App}(d_u, i_u)$ を満たすと仮定する．$\mathrm{App}(d_u, i_u)$ より $\forall y \in d_u\,[i_u(y) = \mathbf{G}(y, i_u \restriction (y{\downarrow}))] \cdots (*)$ である．$h_u \neq i_u$ と仮定して矛盾を導く．このとき，$S = \{s \in d_u (\subseteq \mathbf{A}) \colon h_u(s) \neq i_u(s)\} \neq \varnothing$ なので，極小元 $s_0 \in S \subseteq d_u$ がとれる．いま，$t \in s_0{\downarrow}$ ならば $t\,\mathbf{R}\,s_0$．s_0 の極小性より $h_u(t) = i_u(t)$ となる．したがって，$h_u \restriction (s_0{\downarrow}) = i_u \restriction (s_0{\downarrow})$．$(*)$ で特に $y = s_0$ とおけば $i_u(s_0) = \mathbf{G}(s_0, i_u \restriction (s_0{\downarrow})) = \mathbf{G}(s_0, h_u \restriction (s_0{\downarrow})) = h_u(s_0)$．よって $i_u(s_0) = h_u(s_0)$ となるが，これは $s_0 \in S$ と矛盾する．　□(Claim 3)

$\mathbf{X}$ が空でないとして矛盾を導く．$\mathbf{X} \neq \varnothing$ とする．定理 4 より，$\mathbf{X}$ には $\mathbf{R}$-極小元 $a \in \mathbf{X}$ が存在する．この $a \in \mathbf{X}$ を固定する．$\tilde{d} := \bigcup_{u\,\mathbf{R}\,a} d_u$ とする．$\mathbf{R}$ は set-like なので，置換公理と和集合公理により $\tilde{d}$ は集合である．任意の $u \in \mathbf{A}$ について，a の $\mathbf{X}$ における極小性より，$u\,\mathbf{R}\,a$ ならば $u \notin \mathbf{X}$ であり，Claim 3 より $\mathrm{App}(d_u, h_u)$ なる h_u が一意に定まる．$\mathbf{R}$ は set-like なので，置換公理と和集合公理より $\tilde{h} := \bigcup_{u\,\mathbf{R}\,a} h_u$ は集合である．

Claim 4　$\mathrm{App}(\tilde{d}, \tilde{h})$．

[$\because$] (i) $\tilde{h}$ は函数，(ii) $\mathrm{dom}\, \tilde{h} = \tilde{d}$，(iii) $\forall y \in \tilde{d}\,[y{\downarrow} \subseteq \tilde{d}]$，(iv) $\forall y \in \tilde{d}\,[\tilde{h}(y) = \mathbf{G}(y, \tilde{h} \restriction (y{\downarrow}))]$ の四点を示せばよい．

<u>(i)(ii):</u> $s \in \mathrm{dom}\, \tilde{h} \leftrightarrow \exists t\,(\langle s,t \rangle \in \tilde{h}) \leftrightarrow \exists t\,(\langle s,t \rangle \in \bigcup_{u\,\mathbf{R}\,a} h_u) \leftrightarrow \exists t\,[\exists u\,\mathbf{R}\,a\,(\langle s,t \rangle \in h_u)] \leftrightarrow$

$\exists u\,\mathbf{R}\,a\,[\exists t\,(\langle s,t\rangle\in h_u)]\leftrightarrow\exists u\,\mathbf{R}\,a\,(s\in\mathrm{dom}\,h_u)\leftrightarrow\exists u\,\mathbf{R}\,a\,(s\in d_u)\leftrightarrow s\in\tilde{d}$．よって $\mathrm{dom}\,\tilde{h}=\tilde{d}$．$\tilde{h}$ が函数であること，つまり $\forall s\in\tilde{d}\,\exists! t\,[\tilde{h}(s)=t]$ を示す．[存在] $s\in\tilde{d}$ を勝手にとる．このとき，ある $u\,\mathbf{R}\,a$ が存在して $s\in d_u$，つまり $s\in\mathrm{dom}\,h_u$．よって $t=h_u(s)$ とすればよい．[一意性] $\langle s,t\rangle,\langle s,t'\rangle\in\tilde{h}$ を仮定して $t=t'$ を示せばよい．仮定より，ある $u,u'\,(\mathbf{R}\,a)$ が存在して $\langle s,t\rangle\in h_u$, $\langle s,t'\rangle\in h_{u'}$ また，a の $\mathbf{X}$ における極小性より $u,u'\notin\mathbf{X}$．したがって，Claim 3 より $\mathrm{App}(d_u,h_u)$, $\mathrm{App}(d_{u'},h_{u'})$．Claim 1 より $\mathrm{App}(d_u\cap d_{u'},h_u\cap h_{u'})$．いま，$s\in\mathrm{dom}\,h_u\cap\mathrm{dom}\,h_{u'}=d_u\cap d_{u'}$ であり，$h_u\cap h_{u'}$ は $d_u\cap d_{u'}$ 上の函数なので，$t=h_u(s)=(h_u\cap h_{u'})(s)=h_{u'}(s)=t'$．

(iii): $y\in\tilde{d}$ とする．ある $u\,\mathbf{R}\,a$ が存在して $y\in d_u$ である．よって $y\,\mathbf{R}^*u$ である．$z\in y\!\downarrow$ を勝手にとる．$z\,\mathbf{R}\,y$ である．$z\,\mathbf{R}\,y\,\mathbf{R}^*u$ より $z\,\mathbf{R}^*u$ である．よって $z\in d_u$．よって $y\!\downarrow\subseteq d_u\subseteq\tilde{d}$．

(iv): 背理法．(iv) が偽なら $Y=\{y\in\tilde{d}(\subseteq\mathbf{A})\colon\tilde{h}(y)\neq\mathbf{G}(y,\tilde{h}\restriction(y\!\downarrow))\}\neq\varnothing$ である．よって $\mathbf{R}$-極小元 $y_0\in Y$ が存在する．このとき $y_0\in\tilde{d}$ なので，ある $u\,\mathbf{R}\,a$ について $y_0\in d_u$ である．極小性より $u\notin\mathbf{X}$．よって，Claim 3 より $\mathrm{App}(d_u,h_u)$，特に $\forall y\in d_u\,[h_u(y)=\mathbf{G}(y,h_u\restriction(y\!\downarrow))]$．いま，$\tilde{h}\restriction(y_0\!\downarrow)=h_u\restriction(y_0\!\downarrow)$ である[*8]から，$\tilde{h}(y_0)=h_u(y_0)=\mathbf{G}(y,h_y\restriction(y\!\downarrow))=\mathbf{G}(y,\tilde{h}\restriction(y\!\downarrow))$ を得るが，これは y_0 の取り方に反する．　□(Claim 4)

今，$\mathbf{R}$ は整礎なので $a\,\mathbf{R}^+a$ とはなり得ない．よって $a\notin\mathrm{pred}_{\mathbf{A},\mathbf{R}^+}(a)=\tilde{d}$．また，定義より明らかに $a\!\downarrow\subseteq\tilde{d}$ である．D,H を，以下のように定める：

$$D:=\tilde{d}\cup\{a\}=\mathrm{pred}_{\mathbf{A},\mathbf{R}^*}(a),\qquad H:=\tilde{h}\cup\Big\{\langle a,\mathbf{G}(a,\tilde{h}\restriction(a\!\downarrow))\rangle\Big\}. \tag{8}$$

Claim 5 $\mathrm{App}(D,H)$.

[∵] H が D を定義域とする函数であることは明らか．また，$\forall y\in D\,[y\!\downarrow\subseteq D]$ も明らか[*9]．$\forall y\in D\,[H(y)=\mathbf{G}(y,H\restriction(y\!\downarrow))]$ も明らか[*10]である．　□(Claim 5)

以上より $\mathrm{App}(D,H)\wedge a\in D$．しかし，$a$ は $\mathbf{X}=\{u\in\mathbf{A}\colon\neg\exists d,h\,[\mathrm{App}(d,h)\wedge u\in d]\}$ の元であるから，これは矛盾である．よって $\mathbf{X}$ は空，つまり，式 (7): $\forall u\in\mathbf{A}\,\exists d,h\,[\mathrm{App}(d,h)\wedge u\in d]$ が成り立つ．

以上の準備のもとで，(E)，つまり $\exists y\,\psi(x_0,y)$ を示す．$x_0\notin\mathbf{A}$ のとき，$\psi(x_0,\varnothing)$ なので，$y=\varnothing$ とすればよい．$x_0\in\mathbf{A}$ のとき，式 (7) により，$\mathrm{App}(d,h)\wedge x_0\in d$ なる d,h が存在する．このとき $\psi(x_0,h(x_0))$ なので[*11]，$y=h(x_0)$ とすればよい．以上で (E), (U) が確かめられ，定理の条件 (i) が確かめられた．よって $\psi(x,y)$ はクラス函数 $y=\mathbf{F}(x)$ を表している．

次に定理の条件 (ii)，つまり $\forall a\in\mathbf{A}\,[\mathbf{F}(a)=\mathbf{G}(a,\mathbf{F}\restriction(a\!\downarrow))]$ を確かめる．$a\in\mathbf{A}$ を固定する．式 (7) より，$\mathrm{App}(d,h)\wedge a\in d$ を満たす d,h が存在する．この d,h について，

Claim 6 $h=\mathbf{F}\restriction d$.

[∵] 定義域は共に d である．よって，$\forall x\in d\,[h(x)=\mathbf{F}(x)]$ を示せばよい．$x\in d$ を任意にとる．い

---

*8 h_u は $\tilde{h}$ の d_u への制限である．よって $y_0\!\downarrow\subseteq d_u$ の像は相等しい．

*9 $y\in D$ を勝手にとる．$u\in y\!\downarrow$ とする．$u\,\mathbf{R}\,y$ である．$y\in D$ より $y\,\mathbf{R}^*a$ である．よって $u\,\mathbf{R}\,y\,\mathbf{R}^*a$，よって $u\,\mathbf{R}^*a$．よって $u\in D$．

*10 $y\in D$ とする．$y=a$ と $y\neq a$ で場合分け．$y=a$ のとき，H の定義より明らかに $H(a)=\mathbf{G}(a,H\restriction(a\!\downarrow))$．$y\neq a$ のとき，H は a 未満では常に $\tilde{h}$ と同様に振舞うので，$\mathrm{App}(\tilde{d},\tilde{h})$ に注意すれば，$H(y)=\tilde{h}(y)=\mathbf{G}(y,\tilde{h}\restriction(y\!\downarrow))=\mathbf{G}(y,H\restriction(y\!\downarrow))$．

*11 $x\in\mathbf{A}$ なので，$\exists\delta,\eta\,(\mathrm{App}(\delta,\eta)\wedge x\in\delta\wedge\eta(x)=y)$ に $x=x_0$, $y=h(x_0)$ を代入したものが満たされることを示せばよい．代入した式は $\exists\delta,\eta\,(\mathrm{App}(\delta,\eta)\wedge x_0\in\delta\wedge\eta(x_0)=h(x_0))$ であり，この式は $\delta=d$, $\eta=h$ (d,h は先ほど取ったもの) を証拠として成立する．

ま，$\mathrm{App}(d,h)$ ゆえに $d \subseteq \mathbf{A}$ であり $x \in \mathbf{A}$ となることに注意すれば，$\mathbf{F}, \psi$ の定義より，

$$\mathbf{F}(x) = \text{“}\psi(x,y) \text{ を満たす唯一の } y\text{”} = \text{“}\exists \delta, \eta\,[\mathrm{App}(\delta,\eta) \wedge x \in \delta \wedge \eta(x) = y] \text{ を満たす唯一の } y\text{”}$$

である．ところで，$y = h(x)$ はこの条件を満たす．実際，$\delta = d$, $\eta = h$ を証拠として $\mathrm{App}(d,h) \wedge x \in d \wedge h(x) = h(x)$ となるからである．y の一意性より $y = h(x)$ である． □(Claim 6)

いま，$\mathrm{App}(d,h)$ より $\forall u \in d\,[u{\downarrow} \subseteq d]$，特に $a{\downarrow} \subseteq d$ である．したがって，$x \in a{\downarrow}\ (\subseteq d)$ の h と $\mathbf{F}$ での行先は一致する．よって $h{\restriction}(a{\downarrow}) = \mathbf{F}{\restriction}(a{\downarrow}) \cdots (*)$．また，$a \in d$ より $h(a) = \mathbf{F}(a)$ である．このことと $\mathrm{App}(d,h)$, $(*)$ より，

$$\mathbf{F}(a) = h(a) = \mathbf{G}(a, h{\restriction}(a{\downarrow})) = \mathbf{G}(a, \mathbf{F}{\restriction}(a{\downarrow}))$$

となり，定理の条件 (ii) が満たされる．

最後に，このような $\mathbf{F}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ が $\mathbf{A}, \mathbf{R}, \varphi$ に対して一意的であることを示す．すなわち，$\mathbf{F}, \mathbf{F}'$ が定理の条件 (ii) を満たすならば $\forall a \in \mathbf{A}\,[\mathbf{F}(a) = \mathbf{F}'(a)]$ であることを示す．もしそうでなければ，$\mathbf{X} := \{a \in \mathbf{A} \colon \mathbf{F}(a) \neq \mathbf{F}'(a)\}$ は空でないクラスなので，定理 4 より $\mathbf{R}$-極小元 $a_0 \in \mathbf{X}$ をもつ．このとき，任意の $u \in a_0{\downarrow}$ について，$u \mathbf{R} a_0$ と a_0 の極小性より $\mathbf{F}(u) = \mathbf{F}'(u)$．よって $\mathbf{F}{\restriction}(a{\downarrow}) = \mathbf{F}'{\restriction}(a{\downarrow})$．このことと $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}'$ が定理の条件 (ii) を満たすことから

$$\mathbf{F}(a_0) = \mathbf{G}(a_0, \mathbf{F}{\restriction}(a_0{\downarrow})) = \mathbf{G}(a_0, \mathbf{F}'{\restriction}(a_0{\downarrow})) = \mathbf{F}'(a_0).$$

しかしこれは $a_0 \in \mathbf{X}$ に矛盾する． □

参考文献

本稿では，主に [5], Ch.I, §9 を参考にしました．対応する定理番号の明記は行っていません．

[1] Devlin, K., *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory* (2nd ed.), Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1993.

[2] Jech, T., *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2002.

[3] Kunen, K., *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, Vol. 102. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1980. 邦訳 [13].

[4] Kunen, K., *The Foundations of Mathematics*, Vol. 19. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2009. 邦訳 [14].

[5] Kunen, K., *Set Theory* (rev. ed.), Vol. 34. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.

[6] Schindler, R., *Set Theory, Exploring Independence and Truth*, Universitext, Springer, 2014.

[7] Shoenfield. J.R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

[8] Takeuti, G. and Zaring, W.M., *Introduction to Axiomatic Set Theory* (2nd ed.), Vol. 1. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1982.

[9] Weaver, N., *Forcing for Mathematicians*, World Scientific Publishing, 2014.

[10] 新井敏康, 数学基礎論, 岩波書店, 2011.

[11] 菊池誠, 不完全性定理, 共立出版, 2014.
[12] 倉田令二朗・篠田寿一, 公理論的集合論, 倉田令二郎監修・数学基礎論シリーズ 2 巻, 河合文化教育研究所, 1996.
[13] K. キューネン（藤田博司訳）, 集合論–独立性証明への案内, 日本評論社, 2008. [3] の邦訳.
[14] K. キューネン（藤田博司訳）, キューネン数学基礎論講義, 日本評論社, 2016. [4] の邦訳.
[15] 田中一之編・著, 数学基礎論講義, 日本評論社, 1997.
[16] 田中一之編, ゲーデルと 20 世紀の論理学 4 集合論とプラトニズム, 東京大学出版会, 2007.
[17] 田中一之・鈴木登志雄, 数学のロジックと集合論, 培風館, 2003.
[18] 田中尚夫, 公理的集合論, 現代数学レクチャーズ (B-10), 培風館, 1982.
[19] 田中尚夫, 選択公理と数学–発生と論争、そして確立への道 (増訂版), 遊星社, 2005.