

集合論ノート 0002 共終数 (cofinality) と König の定理

近藤友祐 (@elecello_)

初稿: 2017/09/01

この文書の場所: <https://elecello.com/works.html>

無駄な部分が多くなってしまった……

定義 1. 極限順序数^{*1} γ に対し, その共終数 $\text{cf}(\gamma)$ を下式で定義^{*2}する:

$$\text{cf}(\gamma) = \min\{\text{type}(X) : X \subseteq \gamma \wedge \sup X = \gamma\}.$$

ただし, $\text{type}(X)$ は整列集合 X の順序型を意味する.

以降特に断りがない場合, γ は極限順序数を表すものとする. また, 集合 $\{\text{type}(X) : X \subseteq \gamma \wedge \sup X = \gamma\}$ を $S(\gamma)$ と表すことにする.

定義 2. $X, Y \subseteq \gamma$ とする. X が Y で非有界 (または共終) であるとは, 下式が成り立つことである:

$$\forall \beta \in Y \exists \delta \in X (\beta \leq \delta).$$

補題 3. $X \subseteq \gamma$ が γ で非有界 $\leftrightarrow \sup X = \gamma$.

Proof. (\rightarrow): 左辺 $\forall \beta \in \gamma \exists \delta \in X (\beta \leq \delta)$ を仮定して, $\bigcup X = \gamma$ を示せばよい^{*3}. (\subseteq): $\beta \in \bigcup X$ とする. ある $\zeta \in X$ が存在して $\beta \in \zeta \in X (\subseteq \gamma)$ が成り立つ. $\beta \in \zeta \in \gamma$ と γ の推移性より $\beta \in \gamma$. 仮定より, $\beta \leq \delta$ なる $\delta \in X (\subseteq \gamma)$ が存在する. $\beta \leq \delta < \gamma$ より $\beta < \gamma$, つまり $\beta \in \gamma$. (\supseteq): $\beta \in \gamma$ とする. γ は極限順序数なので, $\beta + 1 \in \gamma$ である (脚注*4 参照). すると, 仮定より $\delta \in X$ で $\beta + 1 \leq \delta$ なるものが存在する. この δ について, $\beta < \beta + 1 \leq \delta$ より $\beta \in \delta$. $\beta \in \delta \in X$ より, $\beta \in \bigcup X$.

(\leftarrow): 対偶を示す. $X \subseteq \gamma$ が有界であること, すなわち, $\exists \beta \in \gamma \forall \delta \in X (\delta < \beta)$ を仮定する. この β について, $\sup X = \bigcup X \subseteq \beta$ である: (任意の μ について, $\mu \in \bigcup X$ ならば, ある $\delta \in X$ が存在して $\mu \in \delta$. β の取り方から $\delta < \beta$. したがって $\mu < \delta < \beta$ なので $\mu \in \beta$). よって $\bigcup X \subseteq \beta \in \gamma$ すなわち $\sup X \leq \beta < \gamma$ となり, $\sup X \neq \gamma$. \square

補題 4. $X, Y, Z \subseteq \gamma$ とする. X が Y で非有界であり, かつ, Y が Z で非有界であるならば, X は Z で非有界である.

^{*1} 後続順序数 $\alpha + 1$ に対しては $\text{cf}(\alpha + 1) = 1$, 0 に対しては $\text{cf}(0) = 0$ と定義するのが自然である.

^{*2} 少なくとも $\gamma \subseteq \gamma$, $\sup \gamma = \gamma$ (脚注*4 参照) なので, 最小元を取る対象の集合は空でなく, これはちゃんとした定義になっている.

^{*3} 順序数 ξ, ζ について, $\xi \subseteq \zeta$ を示すには, $\forall x (x \in \xi \rightarrow x \in \zeta)$ を示す必要がある. しかし, 順序数の要素はすべて順序数であるため, x が順序数の時のみを考慮すればよい. というのも, x が順序数でない時は仮定が偽になり自動的に成り立つからである.

Proof. いま,

$$\begin{cases} \forall \beta \in Y \exists \delta \in X (\beta \leq \delta) & (1) \\ \forall \beta' \in Z \exists \delta' \in Y (\beta' \leq \delta') & (2) \end{cases}$$

が成り立っている. $\forall \beta'' \in Z \exists \delta'' \in X (\beta'' \leq \delta'')$ $\dots (*)$ を示せばよい. $\beta'' \in Z$ を勝手にとる. 式 (2) において $\beta' = \beta''$ として, $\beta'' \leq \delta'$ なる $\delta' \in Y$ を得る. 式 (1) において $\beta = \delta'$ として, $\delta' \leq \delta$ なる $\delta \in X$ を得る. $\beta'' \leq \delta' \leq \delta$ より $\beta'' \leq \delta$. よって $\delta'' = \delta$ を証拠に $(*)$ が成立する. \square

補題 5. $\text{cf}(\gamma) \leq \gamma$.

Proof. $X(\subseteq \gamma)$ として γ を選ぶ. γ が極限順序数であることから $\sup X = \sup \gamma = \gamma^{*4}$. よって $\text{type}(\gamma) \in S(\gamma)$. 最小性より $\text{cf}(\gamma) \leq \text{type}(\gamma) = \gamma$. \square

補題 6. $\text{cf}(\gamma) \geq \omega$.

Proof. $X \subseteq \gamma$ が空でない有限集合ならば, 最大元 $\eta \in X(\subseteq \gamma)$ を持つ. すると $\eta + 1 \in \gamma$ は X の上界である. したがって, $\sup X \leq \eta + 1 < \gamma$ となる. また明らかに $\sup \emptyset = 0$. よって X が有限集合ならば $\sup X = \gamma$ となりえないため, $n \in S(\gamma)$ なる $n \in \omega$ は存在しない. よって $\text{cf}(\gamma) \geq \omega$. \square

補題 7. $A \subseteq \gamma$ かつ $\sup A = \gamma$ ならば $\text{cf}(\gamma) = \text{cf}(\text{type}(A))$.

Proof. $\alpha := \text{type}(A)$ とし, 両向きの不等号を示す.

$[\text{cf}(\gamma) \leq \text{cf}(\alpha)]$: 順序同型 $f: \alpha \cong A$ をとる. $\sup A = \gamma$ であるから, 補題 3 より A は γ で非有界である. よって α は極限順序数である^{*5}. α は極限順序数であるから, $\text{cf}(\alpha)$ を与えるような Y , すなわち $Y \subseteq \alpha$ で $\sup Y = \alpha$, $\text{type}(Y) = \text{cf}(\alpha)$ を満たすものが存在する. $\sup Y = \alpha$ と補題 3 より Y は α で非有界である. よって, その同型像 $f^{\ast}Y$ も A で非有界である. $f^{\ast}Y$ が A で非有界, A が γ で非有界であることから, 補題 4 より $f^{\ast}Y$ は γ で非有界である. よって, 補題 3 より $\sup(f^{\ast}Y) = \gamma$. $f^{\ast}Y \subseteq \gamma$ と合わせて $\text{type}(f^{\ast}Y) \in S(\gamma)$. 最小性より $\text{cf}(\gamma) \leq \text{type}(f^{\ast}Y) = \text{type}(Y) = \text{cf}(\alpha)$. ここで, f は順序同型なので Y の順序型と $f^{\ast}Y$ の順序型が等しいことを用いた.

$[\text{cf}(\alpha) \leq \text{cf}(\gamma)]$: $\text{cf}(\gamma)$ を与えるような $X \subseteq \gamma$ を固定する. すなわち, $\sup X = \gamma$, $\text{type}(X) = \text{cf}(\gamma)$ なる $X \subseteq \gamma$ を固定する. 函数 $h: X \rightarrow A$ を, $h(\beta) = \min\{\delta \in A: \beta \leq \delta\}$ によって規定する^{*6}. このとき, h は $\xi < \zeta \rightarrow h(\xi) \leq h(\zeta)$ をみたす^{*7}. $X'(\subseteq X)$ を,

$$X' = \{\eta \in X: \forall \xi \in \eta \cap X [h(\xi) < h(\eta)]\}$$

^{*4} 念のため「 γ が極限順序数 $\rightarrow \sup \gamma = \gamma$ 」を示しておく. $(\subseteq): \alpha \in \bigcup_{\beta \in \gamma} \beta$ とすると, ある $\beta \in \gamma$ が存在して $\alpha \in \beta$. $\alpha \in \beta \in \gamma$ であり, γ は推移的集合なので $\alpha \in \gamma$. $(\sup): \alpha \in \gamma$ とする. $\alpha < \alpha + 1 < \gamma$ である [\cdot : γ は極限順序数なので $\alpha + 1 = \gamma$ となることはない. 三分律より $\alpha + 1 < \gamma$ または $\gamma < \alpha + 1$. 後者, つまり $\gamma \in \alpha \cup \{\alpha\}$ を仮定すると, $\gamma \in \alpha$ または $\gamma = \alpha$. これは $\alpha < \gamma$ に反する. よって, 前者 $\alpha + 1 < \gamma$ でしかあり得ない]. よって $\beta = \alpha + 1 \in \gamma$ を証人として $\alpha \in \bigcup_{\beta \in \gamma} \beta$.

^{*5} 対偶「 α が後続順序数ならば A は γ で有界」を示す. $\alpha = \beta + 1$ とする. $f: \beta \cup \{\beta\} \cong A$ は順序保存なので $\forall \xi < \beta (f(\xi) < f(\beta))$ である. よって, $\text{ran } f = A < f(\beta) + 1$ (i.e. $\forall a \in A (a < f(\beta) + 1)$) であり, $f(\beta) \in \gamma$ と γ が極限順序数であることより $f(\beta) + 1 < \gamma$ なので, $f(\beta) + 1$ を証拠として A は γ で有界である.

^{*6} A は γ で非有界なので, 与えられた $\beta \in X \subseteq \gamma$ に対して $\beta \leq \delta$ なる $\delta \in A$ は必ず存在する. よってこの定義は合法的である.

^{*7} 定義から明らかなように, h は与えられた引数以上の A の値を返す. よって $\xi < \zeta \leq h(\zeta) \in A$. $h(\zeta)$ は ξ 以上の A の元である. $h(\xi)$ は ξ 以上の A の元のうち最小のものなので, $h(\xi) \leq h(\zeta)$.

で定める。このとき、 $h \upharpoonright X': X' \rightarrow A$ は X' 上狭義単調増加である*⁸。ゆえに $h \upharpoonright X'$ は単射である。さらに、 $h \text{“} X' := (h \upharpoonright X') \text{“} X'$ は A の中で非有界、すなわち $\forall \beta \in A \exists \delta \in X' (\beta \leq h(\delta))$ である*⁹。 $h \text{“} X$ は A で非有界なので、同型像 $\hat{h} \text{“} X' := f^{-1} \text{“} (h \text{“} X') \subseteq \alpha$ は α で非有界である。補題 3 より $\sup(\hat{h} \text{“} X') = \alpha$ 。よって $\text{type}(\hat{h} \text{“} X') \in S(\alpha)$ 。よって、 $\text{cf}(\alpha) \leq \text{type}(\hat{h} \text{“} X') = \text{type}(h \text{“} X') = \text{type}(X') \leq \text{type}(X) = \text{cf}(\gamma)$ 。ここで、 $\text{type}(h \text{“} X') = \text{type}(X')$ は、 $h \upharpoonright X': X' \rightarrow h \text{“} X'$ が狭義単調増加な全単射であるから順序同型になっていることから従う。また、 $\text{type}(X') \leq \text{type}(X)$ は $X' \subseteq X$ から従う。 \square

定義 8. 極限順序数 γ が正則であるとは、 $\text{cf}(\gamma) = \gamma$ であることをいう。 $\text{cf}(\gamma) < \gamma$ であるとき、 γ は特異であるという。

補題 9. $\text{cf}(\text{cf}(\gamma)) = \text{cf}(\gamma)$ 。つまり、 $\text{cf}(\gamma)$ は正則である。

Proof. $\text{cf}(\gamma)$ を与えるような $A \subseteq \gamma$ を固定する。すなわち、 $\sup A = \gamma$, $\text{type}(A) = \text{cf}(\gamma)$ なる $A \subseteq \gamma$ を固定する。補題 7 により、 $\text{cf}(\gamma) = \text{cf}(\text{cf}(\gamma))$ が従う。 \square

補題 10. $\omega \leq \text{cf}(\gamma) \leq |\gamma| \leq \gamma$ 。

Proof. 左側の不等号は補題 6 そのもの、右側の不等号は濃度の定義より自明。中央の不等号を示す。全射 $f: |\gamma| \rightarrow \gamma$ を固定する。函数 $g: |\gamma| \rightarrow \mathbf{ON}$ を次のように再帰的に定義する：

$$g(\eta) = \max \left(f(\eta), \sup_{\xi < \eta} (g(\xi) + 1) \right) .$$

このとき、 g は狭義単調増加 ($\mu < \nu \rightarrow g(\mu) < g(\nu)$) である*¹⁰。したがって g は単射であり、順序同型 $g: |\gamma| \cong \text{ran } g$ が成り立つ。よって $\text{type}(\text{ran } g) = \text{type}(|\gamma|) = |\gamma|$ である*¹¹。 $\text{ran } g \subseteq \gamma$ と $\text{ran } g \not\subseteq \gamma$ で場合分けしよう。

$\text{ran } g \subseteq \gamma$ のとき、 $\text{ran } g$ は γ で非有界である*¹²から、補題 3 により $\sup(\text{ran } g) = \gamma$ 。 $\text{ran } g \subseteq \gamma$, $\sup(\text{ran } g) = \gamma$ より $\text{type}(\text{ran } g) \in S(\gamma)$ 。よって $\text{cf}(\gamma) \leq \text{type}(\text{ran } g) = |\gamma|$ 。

$\text{ran } g \not\subseteq \gamma$ のとき、このとき、 g はある点で γ 以上の値を返すので、 $T = \{\eta \in |\gamma| : \gamma \leq g(\eta)\}$ は空でない。よって $\eta = \min T$ として $\eta \in |\gamma|$ を定義できる。この η は極限順序数である*¹³。さらに、 $\sup(g \text{“} \eta) = \gamma$

*⁸ つまり、 $\forall \mu, \nu \in X' [\mu < \nu \rightarrow (h \upharpoonright X')(\mu) < (h \upharpoonright X')(\nu)]$ が成り立つ。何となれば、 $\mu, \nu \in X'$ とすると

$$\forall \xi \in \mu \cap X [h(\xi) < h(\mu)], \quad \forall \xi \in \nu \cap X [h(\xi) < h(\nu)] \tag{3}$$

が成り立つ。 $\mu < \nu$ ならば $\mu \in \nu \cap X$ なので式 (3) 右式より $(h \upharpoonright X')(\mu) = h(\mu) < h(\nu) = (h \upharpoonright X')(\nu)$ 。

*⁹ $\beta \in A$ を任意にとる。集合 $X_\beta \subseteq \gamma$ を、 $X_\beta = \{\delta \in X : h(\delta) > \beta\}$ で定める。 X_β は空でない ($\because X$ は γ で非有界なので $\forall \beta' \in \gamma \exists \delta' \in X (\beta' \leq \delta')$) である。特に $\beta' = \beta + 1 \in \gamma$ を選ぶと、 $\delta' \in X$ で $\beta + 1 \leq \delta'$ なるものがとれる。さて、函数 $h: X \rightarrow A$ は引数以上の値を返すので $\delta' \leq h(\delta')$ 。したがって $\beta + 1 \leq h(\delta')$ 、よって $\beta < h(\delta')$ から、最小元 $\delta = \min X_\beta \in X_\beta$ がとれる。 X_β の定義より $\beta \leq h(\delta)$ は明らか。 $\delta \in X'$ を示せばよい。そうでないとする、 $\exists \xi \in \delta \cap X (h(\delta) \leq h(\xi))$ である。この ξ について、 $\xi < \delta$ と h が広義単調増加であることから $h(\xi) \leq h(\delta)$ 。 $h(\delta) \leq h(\xi)$ と合わせて $h(\xi) = h(\delta)$ 。 $\delta \in X_\beta$ より $\beta < h(\delta)$ だが、先の等式より $\beta < h(\xi)$ 。よって $\xi \in X_\beta$ 。 $\xi \in X_\beta$ で $\xi < \delta$ であるから、これは δ の最小性に反する。

*¹⁰ $\mu < \nu$ とする。 $g(\nu) = \max(f(\nu), \sup_{\xi < \nu} (g(\xi) + 1)) \geq \sup_{\xi < \nu} (g(\xi) + 1) = \bigcup_{\xi < \nu} (g(\xi) \cup \{g(\xi)\})$ 。よって $g(\mu) < g(\nu)$ つまり $g(\mu) \in g(\nu)$ を示すには、 $\exists \xi < \nu [g(\mu) \in g(\xi) \cup \{g(\xi)\}]$ 、つまり $\exists \xi < \nu [g(\mu) \leq g(\xi)]$ を言えばよい。背理法。 $\forall \xi < \nu [g(\xi) < g(\mu)]$ と仮定する。いま $\mu < \nu$ なので、特に $\xi = \mu$ とおけば $g(\mu) < g(\mu)$ となり矛盾。

*¹¹ $\text{type}(|\gamma|) = |\gamma|$ は $|\gamma|$ が基数であることによる。

*¹² 本来示すべきは $\forall \beta \in \gamma \exists \delta \in \text{ran } g (\beta \leq \delta)$ であるが、 $f: |\gamma| \rightarrow \gamma$ は全射で、 $\text{dom } g = |\gamma|$ なので、 $\forall \beta' \in |\gamma| \exists \delta' \in |\gamma| (f(\beta') \leq g(\delta'))$ を示せば十分である。 $\beta' \in |\gamma|$ を任意にとる。 g の定義から明らかに $f(\beta') \leq g(\beta')$ なので、 $\delta' = \beta' \in |\gamma|$ を証拠にして成り立つ。

*¹³ $\eta = \xi + 1$ と書けたと仮定して矛盾を導く。 $g(\xi + 1) = \max(f(\xi + 1), \sup_{\zeta < \xi + 1} (g(\zeta) + 1)) = f(\xi + 1)$ または $g(\xi) + 1$ ($\because g$ は

である*14. また, η の最小性より $\forall \xi \in \eta (g(\xi) \in \gamma)$ なので, $g \text{``} \eta \subseteq \gamma$. そして, g の狭義単調増加性より $g: \eta \cong g \text{``} \eta$. 以上より $\text{type}(g \text{``} \eta) \in S(\gamma)$ なので, $\text{cf}(\gamma) \leq \text{type}(g \text{``} \eta) = \text{type}(\eta) < |\gamma|$. ここで最後の不等号は $|\gamma|$ が基数で $\eta < |\gamma|$ であることによる. \square

補題 11. γ が正則ならば, γ は基数である.

Proof. 補題 10 と γ の正則性より, $\text{cf}(\gamma) \leq |\gamma| \leq \gamma = \text{cf}(\gamma)$. よって $|\gamma| = \gamma$ となり, γ は基数である. \square

補題 12. \aleph_0 および任意の後続基数は正則である.

Proof. $\aleph_0 = \omega$ については, 補題 10 より $\omega \leq \text{cf}(\omega) \leq |\omega| \leq \omega$ であるから $\text{cf}(\omega) = \omega$.

α を任意の順序数とし, $\aleph_{\alpha+1}$ が正則であることを示す. $\text{cf}(\aleph_{\alpha+1}) < \aleph_{\alpha+1}$ が成り立たないことを示せばよい. そのためには, $A \subseteq \aleph_{\alpha+1}$, $\text{type}(A) < \aleph_{\alpha+1}$, $\sup A = \aleph_{\alpha+1}$ の 3 つの条件を同時に満たすような集合 A が存在しないことを示せばよい. 以下で, $A \subseteq \aleph_{\alpha+1}$ かつ $\text{type}(A) < \aleph_{\alpha+1}$ ならば $\sup A < \aleph_{\alpha+1}$ となってしまうことを示す. $A \cong \text{type}(A) < \aleph_{\alpha+1}$ より $|A| = |\text{type}(A)| < |\aleph_{\alpha+1}| = \aleph_{\alpha+1}$. よって $|A| \leq \aleph_\alpha$. また, A の任意の元 β について, $\beta \in A \subseteq \aleph_{\alpha+1}$ より $\beta < \aleph_{\alpha+1}$. よって $|\beta| < \aleph_{\alpha+1}$ よって $|\beta| \leq \aleph_\alpha$ が成り立つ. 以上より $\sup A = \bigcup A$ は濃度 \aleph_α 以下の集合たちの \aleph_α 以下個の和集合なので, 選択公理のもと $|\sup A| \leq \aleph_\alpha$. よって $\sup A < \aleph_{\alpha+1}$ *15. \square

補題 13. η が極限順序数ならば, $\text{cf}(\aleph_\eta) = \text{cf}(\eta)$.

Proof. $A = \{\aleph_\alpha : \alpha < \eta\}$ とおけば, $A \subseteq \aleph_\eta$, $\sup A = \aleph_\eta$, $\text{type}(A) = \eta$ なので, 補題 7 より $\text{cf}(\aleph_\eta) = \text{cf}(\eta)$ が従う. \square

次の補題は König の定理の証明には必要ないが, 集合族の和集合のサイズの計算に便利なので証明しておく.

補題 14.

$$\left[\theta (\geq \aleph_0) : \text{正則基数}, \mathcal{F} : \text{集合族 s.t. } (|\mathcal{F}| < \theta \wedge \forall S \in \mathcal{F} (|S| < \theta)) \right] \rightarrow \left| \bigcup \mathcal{F} \right| < \theta.$$

Proof. $X = \{|S| : S \in \mathcal{F}\}$ とする. 各 $S \in \mathcal{F}$ について $|S| \in \theta$ であるから $X \subseteq \theta$. また, $|X| \leq |\mathcal{F}| < \theta$ よ

狭義単調増加). $g(\xi + 1) = f(\xi + 1) (\in \text{cod } f = \gamma)$ のときは $g(\xi + 1) = g(\eta) < \gamma$ となり矛盾. $g(\xi + 1) = g(\xi) + 1$ のとき, $\xi < \eta$ であることに気を付ければ, η の最小性より $g(\xi) < \gamma$ が従う. γ は極限順序数なので $g(\xi) + 1 < \gamma$. よって $g(\eta) = g(\xi) + 1 < \gamma$ となり矛盾.

*14 まず, $\sup(g \text{``} \eta) = \sup(\{g(\xi) : \xi \in \eta\}) = \sup_{\xi < \eta} g(\xi)$ であることに気を付ける. すると, 示すべきは $\sup_{\xi < \eta} g(\xi) = \gamma$ である. 両向きの不等号を示す. (\leq): $\alpha \in \sup_{\xi < \eta} g(\xi)$ とすると, ある $\xi < \eta$ が存在して $\alpha \in g(\xi)$. $\xi < \eta$ と η の最小性から $g(\xi) < \gamma$. $\alpha < g(\xi) < \gamma$ より $\alpha \in \gamma$. (\geq): まず, $\gamma \leq g(\eta) = \max(f(\eta), \sup_{\xi < \eta} (g(\xi) + 1)) = \sup_{\xi < \eta} (g(\xi) + 1)$ である. ここで, 最後の等号には f の定義から $f(\eta) < \gamma$ であることを用いた. さらに, $\sup_{\xi < \eta} (g(\xi) + 1) = \sup_{\xi < \eta} g(\xi)$ である. \geq は明らかなので \leq を示す. $\alpha \in \bigcup_{\xi < \eta} (g(\xi) \cup \{g(\xi)\})$ とする. このとき, ある $\zeta \in \eta$ が存在して $\alpha \in g(\zeta) \cup \{g(\zeta)\}$. $\alpha \in g(\zeta)$ ならば, この $\zeta =: \xi$ を証拠に $\alpha \in \bigcup_{\xi < \eta} g(\xi)$. $\alpha = g(\zeta)$ ならば, g が狭義単調増加であることから, $\alpha = g(\zeta) < g(\zeta + 1) < \gamma$. 最後の不等号は, η が極限順序数なので $\zeta + 1 < \eta$ であること, および η の最小性から従う. よって $\xi = \zeta + 1$ を証拠に $\alpha \in \bigcup_{\xi < \eta} g(\xi)$ となる. よって $\sup_{\xi < \eta} g(\xi) = \sup_{\xi < \eta} (g(\xi) + 1) = g(\eta) \geq \gamma$.

*15 もしも $\sup A \geq \aleph_{\alpha+1}$ なら $|\sup A| \geq |\aleph_{\alpha+1}| = \aleph_{\alpha+1}$. $|\sup A| \leq \aleph_\alpha$ と合わせて $\aleph_\alpha \geq \aleph_{\alpha+1}$ となり矛盾.

り $|X| < \theta$. したがって $\text{type}(X) < \theta^{*16}$. よって, θ の正則性より $\sup X < \theta^{*17}$. $\kappa := \max(\sup X, |\mathcal{F}|)$ と定義しよう. すると, $\sup X < \theta$ かつ $|\mathcal{F}| < \theta$ なので $\kappa < \theta$ である. 以下, $\kappa \geq \omega$ と $\kappa < \omega$ で場合分け.

$\kappa \geq \omega$ のとき, $\sup_{S \in \mathcal{F}} |S| = \sup X \leq \kappa$ (最後の不等号は κ の定義から従う) であるから $\forall S \in \mathcal{F} (|S| \leq \kappa)$. 同じく κ の定義から $|\mathcal{F}| \leq \kappa$ である. したがって, $\bigcup \mathcal{F}$ は濃度 κ 以下の集合たちの κ 以下個の和集合なので, 選択公理のもと $|\bigcup \mathcal{F}| \leq \kappa < \theta$ が従う.

$\kappa < \omega$ のとき, $|\mathcal{F}| \leq \kappa < \omega$ より $|\mathcal{F}|$ は有限, $\sup_{S \in \mathcal{F}} |S| = \sup X \leq \kappa < \omega$ より $\forall S \in \mathcal{F} (|S| \leq \omega)$. よって $|\bigcup \mathcal{F}| < \omega < \theta$. □

補題 15. $\theta (> \aleph_0)$ を特異基数とし, $\lambda = \text{cf}(\theta) < \theta$ とする. このとき,

$$\exists \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\theta) \left[|\mathcal{F}| = \lambda \wedge \forall S \in \mathcal{F} (|S| < \theta) \wedge \bigcup \mathcal{F} = \theta \right].$$

Proof. $\text{cf}(\theta)$ を与えるような $\mathcal{F} \subseteq \theta$ をとる. この \mathcal{F} を証人として補題の条件が成り立つことを示す. まず, 任意の x について, $x \in \mathcal{F}$ ならば $x \in \theta$ であり, θ の推移性より $x \subseteq \theta$, すなわち $x \in \mathcal{P}(\theta)$ であるから, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\theta)$ となっていることに気を付ける. いま, \mathcal{F} は $\text{cf}(\theta) = \lambda$ を与えるので, $\text{type}(\mathcal{F}) = \lambda$, $\mathcal{F} \subseteq \theta$, $\sup \mathcal{F} = \theta$ である. $\mathcal{F} \approx \text{type}(\mathcal{F}) = \lambda$ より $|\mathcal{F}| = \lambda$. また各 $\alpha \in \mathcal{F}$ について^{*18}, $\alpha \in \mathcal{F} \subseteq \theta$ より $\alpha < \theta$ であり, θ が基数であることから $|\alpha| < \theta$ が従う. また, $\bigcup \mathcal{F} = \sup \mathcal{F}$ であるから, $\sup \mathcal{F} = \theta$ と合わせて $\bigcup \mathcal{F} = \theta$. □

定理 16 (König). 基数 κ, λ について, $\kappa \geq 2$ かつ $\lambda \geq \aleph_0$ ならば $\text{cf}(\kappa^\lambda) > \lambda$.

Proof. $\theta := \kappa^\lambda$ と定義すると θ は無限基数である. また, $\theta^\lambda = (\kappa^\lambda)^\lambda = \kappa^{\lambda \cdot \lambda} = \kappa^\lambda = \theta$ である. したがって, 濃度 $\theta^\lambda = \theta$ の函数族 ${}^\lambda \theta$ を, ${}^\lambda \theta = \{f_\alpha : \alpha < \theta\}$ と並べ上げることができる. $\text{cf}(\theta) \leq \lambda$ を仮定して矛盾を導く. いま, $\text{cf}(\theta) \leq \lambda < 2^\lambda \leq \kappa^\lambda = \theta$ である ('<' は Cantor の定理). よって $\text{cf}(\theta) < \theta$ となり, θ は特異基数である. これに補題 15 を適用すると, θ の部分集合族 \mathcal{F} で,

$$|\mathcal{F}| = \text{cf}(\theta) \wedge \forall S \in \mathcal{F} (|S| < \theta) \wedge \bigcup \mathcal{F} = \theta$$

を満たすものが存在する. $|\mathcal{F}| = \text{cf}(\theta)$ なので, 重複なく $\mathcal{F} = \{S_\xi : \xi < \text{cf}(\theta)\}$ と並べ上げられるが, $\text{cf}(\theta) \leq \lambda$ なので, 重複を許して $\mathcal{F} = \{S_\xi : \xi < \lambda\}$ と表すことができる. このとき, 明らかに上の条件は保たれる. 函数 $g \in {}^\lambda \theta$ を, $g(\xi) := \min(\theta \setminus \{f_\beta(\xi) : \beta \in S_\xi\})$ で定める^{*19}. ${}^\lambda \theta$ は $\{f_\alpha : \alpha < \theta\}$ と列挙されているため, $g \in {}^\lambda \theta$ はある $f_\alpha (\alpha < \theta)$ と一致する. つまり, $\exists \alpha < \theta \forall \xi \in \lambda [g(\xi) = f_\alpha(\xi)] \cdots (*)$ が成り立つ. しかし, $(*)$ の否定 $\forall \alpha < \theta \exists \xi \in \lambda [g(\xi) \neq f_\alpha(\xi)]$ も成り立つ^{*20}ので, 矛盾である. □

系 17. $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.

^{*16} まず, $X \approx \text{type}(X)$ より $|X| = |\text{type}(X)|$ ($A \approx B$ は集合 A と B の間に全単射が存在することを意味する). いま, $X \subseteq \theta$ で θ は基数なので, $\text{type}(X) \leq \text{type}(\theta) = \theta$. よって $\text{type}(X) \leq \theta$ だが, 等号は成り立たない. というのも, もし等号が成り立てば, $\text{type}(X) = \theta$ は基数であるから $|\text{type}(X)| = \text{type}(X)$. 以上より $|X| = |\text{type}(X)| = \text{type}(X) = \theta$ となり, $|X| < \theta$ に反する.

^{*17} \leq は明らかなので, \neq を示せばよい. 背理法. $\sup X = \theta$ であったとすると, $X \subseteq \theta$ と合わせて $\text{type}(X) \in S(\theta)$. よって, $\text{cf}(\theta) \leq \text{type}(X) < \theta$ となるが, これは θ の正則性 (i.e. $\text{cf}(\theta) = \theta$) に矛盾.

^{*18} 本来示すべきは $\forall S \in \mathcal{F} (|S| < \theta)$ であるが, \mathcal{F} の要素はすべて順序数であるから, S として順序数のみを考えればよい.

^{*19} いかなる ξ に対しても $|\{f_\beta(\xi) : \beta \in S_\xi\}| \leq |S_\xi| < \theta$ なので, 最小元を取る対象の集合は空でなく, これはちゃんとした定義になっている.

^{*20} $\alpha < \theta = \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{\xi < \lambda} S_\xi$ を勝手にとると, ある $\xi \in \lambda$ が存在して $\alpha \in S_\xi$. $g(\xi) = \min(\theta \setminus \{f_\beta(\xi) : \beta \in S_\xi\})$ より $g(\xi) \notin \{f_\beta(\xi) : \beta \in S_\xi\}$ である. よって $\forall \beta \in S_\xi [g(\xi) \neq f_\beta(\xi)]$. 特に $\beta = \alpha \in S_\xi$ をとれば, $g(\alpha) \neq f_\beta(\alpha)$.

Proof. 定理 16 において $\kappa = 2$, $\lambda = \aleph_0$ として, $\text{cf}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0 = \omega$ を得る. 一方, 補題 10, 補題 13 より $\text{cf}(\aleph_\omega) = \text{cf}(\omega) = \omega$. したがって, $\text{cf}(2^{\aleph_0}) > \text{cf}(\aleph_\omega)$ であり, 2^{\aleph_0} と \aleph_ω は一致し得ない. \square

参考文献

本稿では, 主に [4], Ch.I, §13 を参考にしました. 対応する定理番号の明記は行っていません.

- [1] Devlin, K., *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory* (2nd ed.), Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1993.
- [2] Jech, T., *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2002.
- [3] Kunen, K., *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, Vol. 102. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1980. 邦訳 [13].
- [4] Kunen, K., *The Foundations of Mathematics*, Vol. 19. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2009. 邦訳 [14].
- [5] Kunen, K., *Set Theory* (rev. ed.), Vol. 34. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.
- [6] Schindler, R., *Set Theory, Exploring Independence and Truth*, Universitext, Springer, 2014.
- [7] Shoenfield. J.R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.
- [8] Takeuti, G. and Zaring, W.M., *Introduction to Axiomatic Set Theory* (2nd ed.), Vol. 1. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1982.
- [9] Weaver, N., *Forcing for Mathematicians*, World Scientific Publishing, 2014.
- [10] 新井敏康, 数学基礎論, 岩波書店, 2011.
- [11] 菊池誠, 不完全性定理, 共立出版, 2014.
- [12] 倉田令二郎・篠田寿一, 公理的集合論, 倉田令二郎監修・数学基礎論シリーズ 2 巻, 河合文化教育研究所, 1996.
- [13] K. キューネン (藤田博司訳), 集合論-独立性証明への案内, 日本評論社, 2008. [3] の邦訳.
- [14] K. キューネン (藤田博司訳), キューネン数学基礎論講義, 日本評論社, 2016. [4] の邦訳.
- [15] 田中一之編・著, 数学基礎論講義, 日本評論社, 1997.
- [16] 田中一之編, ゲーデルと 20 世紀の論理学 4 集合論とプラトニズム, 東京大学出版会, 2007.
- [17] 田中一之・鈴木登志雄, 数学のロジックと集合論, 培風館, 2003.
- [18] 田中尚夫, 公理的集合論, 現代数学レクチャーズ (B-10), 培風館, 1982.
- [19] 田中尚夫, 選択公理と数学-発生と論争、そして確立への道 (増訂版), 遊星社, 2005.