集合論ノート 0000　反映原理

近藤友祐 (`@elecello_`)

初稿: 2016/12/18　更新: 2020/03/08
この文書の場所：　`https://elecello.com/works.html`

本稿で単に論理式といった場合，集合論の言語で書かれた論理式のみを指す．すなわち，用いられる非論理的記号は 2 変数関係記号 $\in$ のみである．また，論理的記号は変数記号と $\neg, \wedge, \exists, =$ のみであり，$\vee$ や $\forall$ などを用いた表記は単なる構文糖衣だと考える．また，以下では特に指摘しない限り公理系 ZF で議論する．

定義 1. $\mathbf{A} = \{x : \alpha(x)\}$ をクラスとする．(メタな) 論理式 φ の $\mathbf{A}$ への**相対化** $\varphi^{\mathbf{A}}$ とは，以下の帰納法により定まる論理式のことである．

(a) φ が $x = y$ または $x \in y$ の形のとき，$\varphi^{\mathbf{A}}$ は φ 自身．

(b) φ が $\neg\psi$ または $\psi \wedge \rho$ の形のとき，$\varphi^{\mathbf{A}}$ はそれぞれ $\neg\psi^{\mathbf{A}}$ または $\psi^{\mathbf{A}} \wedge \rho^{\mathbf{A}}$．

(c) φ が $\exists x\psi$ の形のとき，$\varphi^{\mathbf{A}}$ は $\exists x(x \in \mathbf{A} \wedge \psi^{\mathbf{A}})$ のこと．より正確には，$\exists x(\alpha(x) \wedge \psi^{\mathbf{A}})$ のこと．

定義 2. $\varphi(\vec{x})$ を $\vec{x}$ 以外に自由変数を持たない論理式とし，$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ をクラスとする．

(1) $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ とする．φ が $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ **に対して絶対的**であるとは，$\forall \vec{x} \in \mathbf{A}(\varphi^{\mathbf{A}}(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{B}}(\vec{x}))$ であること[a]．このことを $\mathbf{A} \preccurlyeq_{\varphi} \mathbf{B}$ と書く．

(2) φ が $\mathbf{A}$ **に対して絶対的**であるとは，$\forall \vec{x} \in \mathbf{A}(\varphi^{\mathbf{A}}(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x}))$ であること．このことを $\mathbf{A} \preccurlyeq_{\varphi} \mathbf{V}$ と書く．

[a] 正確には，「$\forall \vec{x} \in \mathbf{A}(\varphi^{\mathbf{A}}(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{B}}(\vec{x}))$ であることが議論の土台となる公理系 (本稿の場合 ZF) で証明できる」ということ．今後，同様の注意を省略する．

定義 3. 論理式のリスト $\Phi : \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ が**部分論理式について閉じている**とは，Φ の任意の論理式の任意の部分論理式がやはり Φ に含まれていることである．

補題 4 (クラス版 Tarski-Vaught 条件)**.** $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ を $\varnothing \neq \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ を満たすクラスとし，$\Phi : \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ は部分論理式について閉じた論理式のリストとする．このとき，以下は同値である．

(a) $\bigwedge_{i<n}(\mathbf{A} \preccurlyeq_{\varphi_i} \mathbf{B})$.

(b) $\exists x \varphi_j(x, \vec{y})$ の形の任意の $\varphi_i(\vec{y})$ について，$\forall \vec{a} \in \mathbf{A}(\varphi_i^{\mathbf{B}}(\vec{a}) \to \exists x \in \mathbf{A} \varphi_j^{\mathbf{B}}(x, \vec{a}))$ [a].

[a] $\varphi_i(\vec{y})$ はこれ以外に自由変数を含まないものとする．また，Φ は部分論理式について閉じているので，φ_i が $\exists x(\cdots)$ の形のとき，"$\cdots$" の部分は必ず Φ に含まれており，したがって φ_j と書けることに注意．このような形の論理式を今後存在量化式と呼ぶことにする．

Proof. (a)⇒(b): $\exists x \varphi_j(x, \vec{y})$ の形の $\varphi_i(\vec{y})$ を任意にとる．$\vec{a} \in \mathbf{A}$ を固定し，$\varphi_i^{\mathbf{B}}(\vec{a})$ を仮定する．(a) より φ_i は $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ に対し絶対的なので $\varphi_i^{\mathbf{A}}(\vec{a})$ である．すなわち $\exists x \in \mathbf{A} \varphi_j^{\mathbf{A}}(x, \vec{a})$ である．(a) より φ_j は $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ に対し絶対的なので $\exists x \in \mathbf{A} \varphi_j^{\mathbf{B}}(x, \vec{a})$ である．

(b)⇒(a): φ_i の構成に関する帰納法で $\mathbf{A} \preccurlyeq_{\varphi_i} \mathbf{B}$ を示す．帰納法の仮定として φ が φ_i より短いときは常に $\mathbf{A} \preccurlyeq_{\varphi} \mathbf{B}$ であると仮定する．φ_i が原子論理式であるときは相対化の定義より明らかに $\mathbf{A} \preccurlyeq_{\varphi_i} \mathbf{B}$[*1]．$\varphi_i$ が $\neg\varphi_j$ のとき，帰納法の仮定より $\forall \vec{x} \in \mathbf{A}(\varphi_j^{\mathbf{A}}(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi_j^{\mathbf{B}}(\vec{x}))$ なので $\forall \vec{x} \in \mathbf{A}(\neg\varphi_j^{\mathbf{A}}(\vec{x}) \leftrightarrow \neg\varphi_j^{\mathbf{B}}(\vec{x}))$，つまり $\mathbf{A} \preccurlyeq_{\varphi_i} \mathbf{B}$．$\wedge$ も同様．最後に φ_i が $\exists x \varphi_j(x, \vec{y})$ の形のときについて示す．$\vec{a} \in \mathbf{A}$ を固定する．このとき，$\varphi_i^{\mathbf{A}}(\vec{a}) \leftrightarrow \exists x \in \mathbf{A} \varphi_j^{\mathbf{A}}(x, \vec{a}) \leftrightarrow \exists x \in \mathbf{A} \varphi_j^{\mathbf{B}}(x, \vec{a}) \leftrightarrow \exists x \in \mathbf{B} \varphi_j^{\mathbf{B}}(x, \vec{a}) \leftrightarrow \varphi_i^{\mathbf{B}}(\vec{a})$．ただし，1 つ目と 4 つ目の同値は相対化の定義，2 つ目の同値は帰納法の仮定．3 つ目の "$\to$" は $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ から明らか．"$\leftarrow$" は (b) による． □

定義 5. クラス $\mathbf{A}$ が A_ξ ($\xi \in \mathbf{ON}$) による累積階層でできているとは，各 $\xi \in \mathbf{ON}$ ごとに集合 A_ξ が存在して以下を満たすことをいう．

(1) $\forall \xi, \zeta(\xi < \zeta \to A_\xi \subseteq A_\zeta)$.

(2) すべての極限順序数 η に対し $A_\eta = \bigcup_{\xi<\eta} A_\xi$.

(3) $\mathbf{A} = \bigcup_{\xi \in \mathbf{ON}} A_\xi$.

(4) $\mathbf{A} \neq \varnothing$.

定理 6 (反映原理)**.** $\Psi : \psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}$ を論理式のリストとし，クラス $\mathbf{A}$ が A による累積階層であるとする．このとき，

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall \zeta \exists \eta > \zeta \left(A_\eta \neq \varnothing \wedge \bigwedge_{i<m} (A_\eta \preccurlyeq_{\psi_i} \mathbf{A}) \wedge \eta \text{ limit} \right).$$

Proof. まず，Ψ のすべての論理式のすべての部分論理式からなるリスト $\Phi : \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ を作っておく．Φ は明らかに部分論理式について閉じている．

Φ に属する存在量化式 $\varphi_i(\vec{y})(= \exists x \varphi_j(x, \vec{y}))$ ごとに，クラス函数 $\mathbf{F}_i : \mathbf{A}^{r_i} \to \mathbf{ON}$ を次のように定める．た

[*1] φ_i が $x \in y$ だとすると，$(x \in y)^{\mathbf{A}}$ も $(x \in y)^{\mathbf{B}}$ も $x \in y$ のこと．したがって明らかに $\forall x, y \in \mathbf{A}((x \in y)^{\mathbf{A}} \leftrightarrow (x \in y)^{\mathbf{B}})$，つまり $\mathbf{A} \preccurlyeq_{\varphi_i} \mathbf{B}$．等号の場合も同様．

だし，$\varphi_i(\vec{y})$ に現れる自由変数は $\vec{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_{r_i})$ のみであるとする．

$$\mathbf{F}_i(\vec{a})=\begin{cases}\min\{\xi\in\mathbf{ON}:\exists b\in A_\xi[\varphi_j^{\mathbf{A}}(b,\vec{a})]\} & (\varphi_i^{\mathbf{A}}(\vec{a})\text{ のとき}) \\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}{}^{*2}$$

さらに，各 $i<n$ に対し，クラス函数 $\mathbf{G}_i:\mathbf{ON}\to\mathbf{ON}$ を

$$\mathbf{G}_i(\xi)=\begin{cases}\sup\{\mathbf{F}_i(a_1,a_2,\ldots,a_{r_i}):a_1,a_2,\ldots,a_{r_i}\in A_\xi\} & (\varphi_i\text{が存在量化式のとき}) \\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

で定める．各 A_ξ は集合なので，置換公理により sup をとる対象は集合であるから，この定義は正当である．

$\zeta\in\mathbf{ON}$ を固定する．$k\in\omega$ 上の再帰によって，順序数の真の増加列 $\langle\eta_k\rangle_{k\in\omega}$ を

$$\eta_0=\min\{\xi>\zeta:A_\xi\neq\varnothing\},\quad \eta_{k+1}=\max\{\eta_k+1,\mathbf{G}_0(\eta_k),\mathbf{G}_1(\eta_k),\ldots,\mathbf{G}_{n-1}(\eta_k)\}$$

で定め，$\eta=\sup_{k\in\omega}\eta_k$ とする．この η が定理の条件を満たすことを示そう．まず，η の定め方より，η が ζ より大きい極限順序数であることはよい[*3]．また，$A_\eta\neq\varnothing$ もよい[*4]．残りの $A_\eta\preccurlyeq_{\psi_i}\mathbf{A}$ について，まず，どの $i<n$ についても $\forall\alpha<\eta(\mathbf{G}_i(\alpha)<\eta)$ である[*5]ことに気を付けよう．その上で Φ に属する任意の存在量化式 $\varphi_i(=\exists x\varphi_j(x,\vec{y}))$ に対し，

$$\forall a_1,a_2,\ldots,a_{r_i}\in A_\eta[\varphi_i^{\mathbf{A}}(\vec{a})\to\exists b\in A_\eta(\varphi_j^{\mathbf{A}}(b,\vec{a}))] \tag{$*$}$$

であることを示す．$a_1,a_2,\ldots,a_{r_i}\in A_\eta$ を固定する．このとき η は極限順序数なので，ある $\alpha<\eta$ について $a_1,a_2,\ldots,a_{r_i}\in A_\alpha$ となっている．$\varphi_i^{\mathbf{A}}(\vec{a})$ を仮定する．$\mathbf{F}_i$ の定め方より，$\exists b\in A_{\mathbf{F}_i(\vec{a})}[\varphi_j^{\mathbf{A}}(b,\vec{a})]$ である．$\mathbf{G}_i$ の定め方と上に述べた $\forall\alpha<\eta(\mathbf{G}_i(\alpha)<\eta)$ に気を付ければ，$\mathbf{F}_i(\vec{a})\leq\mathbf{G}_i(\alpha)<\eta$ なので $A_{\mathbf{F}_i(\vec{a})}\subseteq A_\eta$．よって $\exists b\in A_\eta[\varphi_j^{\mathbf{A}}(b,\vec{a})]$ である．よって $(*)$ が示された．このことと $\varnothing\neq A_\eta\subseteq\mathbf{A}$，補題 4 の (b)⇒(a) を用いて $\bigwedge_{i<n}(A_\eta\preccurlyeq_{\varphi_i}\mathbf{A})$．$\Psi$ は Φ に含まれるので，$\bigwedge_{i<m}(A_\eta\preccurlyeq_{\psi_i}\mathbf{A})$． □

系 7 (in ZFC)**.** ZFC の十分大きい有限部分の可算推移的モデルが存在する．正確には，$\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1}$ を ZFC の公理のリストで外延性公理を含んでいるものとするとき，以下を成り立たせることができる：

$$\mathrm{ZFC}\vdash\exists M\ [\text{“}\langle M,\in|M\rangle\models\varphi_0\wedge\cdots\wedge\varphi_{n-1}\text{”}\ \wedge\ M\text{ は可算推移的}]^a.$$

[a] やや冗長だが，$\in$ を集合 A に制限した二項関係を $\in|A$ で表すことにする．すなわち $\in|A:=\{\langle x,y\rangle\in A\times A:x\in y\}$.

[*2] $\varphi_i^{\mathbf{A}}(\vec{a})$ のとき，つまり $\exists b\in\mathbf{A}\varphi_j^{\mathbf{A}}(b,\vec{a})$ のとき，$b\in\mathbf{A}$ と $\mathbf{A}$ の定義より，ある順序数 ξ が存在し $b\in A_\xi$ であるから第 1 式の $\{\xi\in\mathbf{ON}:\cdots\}$ は空ではなく，この定義は正当である．

[*3] $\zeta<\eta_0<\eta_1<\eta_2<\cdots\leq\eta$ なので $\zeta<\eta$ は明らか．仮に $\eta=\alpha+1$ だったとする．このとき，もしもある $k\in\omega$ について $\eta_k>\alpha$ ならば，$\eta=\alpha+1\leq\eta_k<\eta_{k+1}$ なので η が $\langle\eta_k\rangle_{k\in\omega}$ の上限であることに矛盾する．よってすべての $k\in\omega$ について $\eta_k\leq\alpha$ である．すなわち，α は η よりも真に小さい $\langle\eta_k\rangle_{k\in\omega}$ の上界である．これは η が $\langle\eta_k\rangle_{k\in\omega}$ の上界の中で最小のものであることに矛盾する．

[*4] η_0 の取り方より $A_{\eta_0}\neq\varnothing$ であり，さらに $\eta_0<\eta$ から $A_{\eta_0}\subseteq A_\eta$ となるのでよい．

[*5] $i<n$ を固定する．まず，$\xi<\xi'\to\mathbf{G}_i(\xi)\leq\mathbf{G}_i(\xi')$ である．これは φ_i が存在量化式でないときは $\mathbf{G}_i$ の定義により右辺がともに 0 なので明らか．φ_i が存在量化式であるとき，$\xi<\xi'$ ならば $A_\xi\subseteq A_{\xi'}$ であり，$\mathbf{G}_i$ の定義式において sup をとる集合が ξ より ξ' のほうが大きいので明らか．また，$\xi<\eta$ ならば，十分大きな $k\in\omega$ に対し $\xi<\eta_k$ とできる．もしそうでないなら，すべての $k\in\omega$ に対し $\eta_k\leq\xi$ なので，ξ は η より小さい $\langle\eta_k\rangle_{k\in\omega}$ の上界となってしまい，η の最小性に矛盾する．以上に気を付けると，$\alpha<\eta$ ならば，ある $p\in\omega$ について $\alpha<\eta_p$ であり，$\mathbf{G}_i(\alpha)\leq\mathbf{G}_i(\eta_p)\leq\eta_{p+1}<\eta$．ここで 2 番目の $\leq$ は列 $\langle\eta_k\rangle_{k\in\omega}$ の定義より．

Proof. 文 ψ を $\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$ で定める．基礎の公理より，クラス $\mathbf{V}$ はフォン・ノイマン階層 V_ξ ($\xi \in \mathbf{ON}$) による累積階層でできている．定理 6 で $\zeta = 0$ とし (もっとも ζ は何でもよい)，ZFC $\vdash$ ($V_\eta \preccurlyeq_\psi \mathbf{V}$) なる $\eta \in \mathbf{ON}$ が取れる．ところでこれは ZFC $\vdash$ ($\psi^{V_\eta} \leftrightarrow \psi$) のことであり，集合モデルについては相対化と集合論内部でコード化された論理式に対する充足関係は同値である (ことが ZFC で証明できる) ので，ZFC $\vdash$ (“$\langle V_\eta, \in | V_\eta \rangle \models \psi$” $\leftrightarrow \psi$) を得る．いま ψ は ZFC の公理の連言だから当然 ZFC $\vdash \psi$ であり，これらを合わせて結局 ZFC $\vdash$ “$\langle V_\eta, \in | V_\eta \rangle \models \psi$” を得る．レーヴェンハイム＝スコーレムの定理より，$\langle V_\eta, \in | V_\eta \rangle$ の可算無限な初等部分構造 $\langle N, \in | N \rangle \models \psi$ がとれる．系の仮定より ψ は外延性公理を含むため，N は外延性公理を満たしている．外側で基礎の公理が仮定されているため $\in | N$ は整礎であり，$\in | N$ が set-like なのは当然である．したがってモストフスキ崩壊補題が適用でき，推移的集合 M で $\langle N, \in | N \rangle \cong \langle M, \in | M \rangle$ を満たすものが取れる．これが求めるものである． □

参考文献

[1] Devlin, K., *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory* (2nd ed.), Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1993.

[2] Jech, T., *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2002.

[3] Kunen, K., *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, Vol. 102. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1980. 邦訳 [13].

[4] Kunen, K., *The Foundations of Mathematics*, Vol. 19. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2009. 邦訳 [14].

[5] Kunen, K., *Set Theory* (rev. ed.), Vol. 34. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.

[6] Schindler, R., *Set Theory, Exploring Independence and Truth*, Universitext, Springer, 2014.

[7] Shoenfield. J.R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

[8] Takeuti, G. and Zaring, W.M., *Introduction to Axiomatic Set Theory* (2nd ed.), Vol. 1. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1982.

[9] Weaver, N., *Forcing for Mathematicians*, World Scientific Publishing, 2014.

[10] 新井敏康, 数学基礎論, 岩波書店, 2011.

[11] 菊池誠, 不完全性定理, 共立出版, 2014.

[12] 倉田令二朗・篠田寿一, 公理論的集合論, 倉田令二郎監修・数学基礎論シリーズ 2 巻, 河合文化教育研究所, 1996.

[13] K. キューネン（藤田博司訳）, 集合論–独立性証明への案内, 日本評論社, 2008. [3] の邦訳.

[14] K. キューネン（藤田博司訳）, キューネン数学基礎論講義, 日本評論社, 2016. [4] の邦訳.

[15] 田中一之編・著, 数学基礎論講義, 日本評論社, 1997.

[16] 田中一之編, ゲーデルと 20 世紀の論理学 4 集合論とプラトニズム, 東京大学出版会, 2007.

[17] 田中一之・鈴木登志雄, 数学のロジックと集合論, 培風館, 2003.

[18] 田中尚夫, 公理的集合論, 現代数学レクチャーズ (B-10), 培風館, 1982.

[19] 田中尚夫, 選択公理と数学–発生と論争、そして確立への道 (増訂版), 遊星社, 2005.