数学ノート 0007
$\mathbb{Q}[x]$ の定数項を整数に制限した離散的順序環はユークリッド環

近藤 友祐 (`@elecello_`)

初稿：2020 年 11 月 19 日　最終更新：2020 年 11 月 24 日

命題 1. 不定元 x を正の無限大元として順序を入れた $\mathbb{Q}$-係数多項式環 $\mathbb{Q}[x]$ について，その定数項を $\mathbb{Z}$ の元に制限したもの全体からなる離散的順序環を I とする：

$$I := \{p \in \mathbb{Q}[x] : p \text{ の定数項は } \mathbb{Z} \text{ の元 }\}. \tag{1}$$

このとき，I は離散的順序環であり，全域的な除法の原理をみたす：

$$I \models (\forall d > 0)(\forall a)(\exists q)[qd \leqslant a < (q+1)d]. \tag{2}$$

証明. I が離散的順序環であることの証明は省略する．全域的な除法の原理を示すために $d, a \in I$, $d > 0$ を勝手にとる．d が standard な正自然数であるか a が standard な整数かである場合は結果は明らか[*1]なので，d, a は nonstandard な元であると仮定する．

いま，$\mathbb{Q}[x]$ 上で，**多項式環として，次数をノルムとした**除法の原理が成立する．したがって，

$$a = q_0 d + r_0 \qquad \deg(r_0) < \deg(d) \tag{3}$$

をみたす $q_0, r_0 \in \mathbb{Q}[x]$ が存在する．ここで，$q, r \in \mathbb{Q}[x]$ を

$$(q, r) := \begin{cases} (q_0, r_0) & (\text{if } r_0 \geqslant 0) \\ (q_0 - 1, d + r_0) & (\text{if } r_0 < d) \end{cases} \tag{4}$$

で定める．このとき，

$$a = qd + r, \qquad 0 \leqslant r < d \tag{5}$$

が成り立つ：〔$r_0 \geqslant 0$ の場合は自明．$r_0 < 0$ とする．$qd + r = (q_0 - 1)d + (d + r_0) = q_0 d + r_0 = a$ はよい．$\deg(d) > \deg(r_0)$ かつ $d > 0$ なので $0 \leqslant d + r_0 = r$ もよい．$r = d + r_0$ について，最高次係数こそ d と変わりないが，r_0 (< 0) の最高次のところで係数の負の変化が起こり，$d + r_0$ は d より真に小さくなる〕.

[*1] (1): d も a も standard なとき：これはただの $\mathbb{Z}$ 上の割り算．(2): d が standard で a が nonstandard なとき：$a = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ $(n \geqslant 1)$ と表示し，$a_0 \in \mathbb{Z}$ を $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ で除して $a = q^* d + r^*$ $(q^* \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant r^* < d)$ と表示する．$s := \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$, $q := s/d + q^* \in I$ と定めると, $qd = s + q^* d \leqslant s + q^* d + r^* = s + a_0 = a$, $(q+1)d = qd + d = (s + q^* d) + d > s + (q^* d + r^*) = a$. (3): d が nonstandard で a が standard なとき：$q = 0$ とせよ.

結局，$\mathbb{Q}[x]$ 上で

$$qd \leqslant a < (q+1)d \tag{6}$$

をみたす $q \in \mathbb{Q}[x]$ の存在がいえた．これでは不十分なので，q の“十分近く”にある I の元 q^* を見出して

$$q^*d \leqslant a < (q^*+1)d \tag{7}$$

としたい．$q \in \mathbb{Q}[x]$ を

$$q = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 \in \mathbb{Q}[x] \quad (n \geqslant 0) \tag{8}$$

と表示し，$q', q'' \in I$ を

$$q' := c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + \lfloor c_0 \rfloor \in I, \qquad q'' := q' + 1 \in I \tag{9}$$

で定める．ここに，$\lfloor \cdot \rfloor$ はガウス記号（床函数）である．明らかに $q' \leqslant q$ なので $q'd \leqslant qd \leqslant a$ が成り立つ．いま，

$$\text{(I) } q'd \leqslant a < (q'+1)d, \qquad \text{または}, \qquad \text{(II) } q''d \leqslant a < (q''+1)d$$

が成立する〔$\neg$(I) $\Rightarrow$ (II) を示せばよい．$\neg$(I) なので $a < q'd$ または $(q'+1)d \leqslant a$ が成り立つが，先の注意より前者は起こりえないので後者だけが成り立つ．$q'+1 = q''$ だったので (II) の前半の不等号はよい．後半について，いま $q - q' = c_0 - \lfloor c_0 \rfloor < 1$ である．ゆえに $q'' - q = q' + 1 - q = 1 - (q - q') > 0$ である．ゆえに $q < q''$ となり $a < (q+1)d < (q''+1)d$ である〕．ここで得られた $q' \in I$ ないし $q'' \in I$ が証拠 q^* となり，所望の不等式が得られた． □

本稿では係数体を $\mathbb{Q}$ に限ったが，$\mathbb{Q}$ は任意のアルキメデス的順序体に置き換えてよい（はず）．