数学ノート 0006　実数体 $\mathbb{R}$ は最大のアルキメデス的順序体

近藤 友祐 (@elecello_)

初稿：2020 年 11 月 13 日　最終更新：2020 年 11 月 18 日

命題 1. 順序体 F が $F \supsetneqq \mathbb{R}$ をみたす[a]ならば F は非アルキメデス的 (non-Archimedean) である．

[a] より正確には，F の真の部分順序体 F' が存在して $\mathbb{R}$ が F' と順序体として同型であるということ．

証明. $F \supsetneqq \mathbb{R}$ を順序体とする．F がアルキメデス的であると仮定して矛盾を導く．

まず，F はアルキメデス的なので $\mathbb{Q}$ は（したがって $\mathbb{R}$ も）F で順序稠密である〔$x < y$ をみたす $x, y \in F$ を勝手に取る．いま $0 < \frac{1}{y-x} \in F$ であって F はアルキメデス的なので，$0 < \frac{1}{y-x} < n$ をみたす $n \in \mathbb{N}$ がとれる．これにより $nx + 1 < ny$ である．$k := \lfloor nx \rfloor \in \mathbb{N}$ と置けば $k \leqslant nx < k+1$ である（$\lfloor \cdot \rfloor$ はガウス記号）．すると $nx < k+1 \leqslant nx+1 < ny$ が成り立つ．よって $nx < k+1 < ny$．よって $x < \frac{k+1}{n} < y$ となる．よって $x < z < y$ なる $z \in \mathbb{Q}$ が見いだせた〕．

さて，$F \neq \mathbb{R}$ なので F は完備順序体ではない[*1]．したがって F の切断

$$\mathcal{C} = \langle A, B \rangle \qquad (A, B \subseteq F,\ \ A, B \neq \varnothing,\ \ A \cup B = F,\ \ A \cap B = \varnothing,\ \ A < B) \tag{1}$$

であって，A の最大値も B の最小値も F の中に存在しないようなものがとれる[*2]．ここで，$\mathbb{R}$ の切断

$$\mathcal{C}' = \langle A \cap \mathbb{R}, B \cap \mathbb{R} \rangle \tag{2}$$

を考える〔$\mathcal{C}'$ が確かに $\mathbb{R}$ の切断であることを示す．まず $A \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$ を示す．$A \neq \varnothing$ だったので，ある $a \in A$ がとれる．F における $\mathbb{R}$ の順序稠密性より，$a - 1 < c < a$ を満たす $c \in \mathbb{R}$ がとれる．A は下に閉なので $c \in A$ である．よって $c \in A \cap \mathbb{R}$ となり，$A \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$ である．同様に $B \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$ である．切断のその他の条件は明らか[*3]．〕．

$\mathbb{R}$ のデデキント性より，$A \cap \mathbb{R}$ が $A \cap \mathbb{R}$ に最大値をもつか，$B \cap \mathbb{R}$ が $B \cap \mathbb{R}$ に最小値をもつか成立する．一般性を失わず，前者であるとしてよい．$\alpha := \min(A \cap \mathbb{R}) \in A \cap \mathbb{R}$ とおく．A は F に最大値をもたないの

[*1] $\mathbb{R}$ は同型を除き唯一の完備順序体である．ここで順序体 K が完備順序体であるとは，空でなく上に有界な K の任意の部分集合が K の中に上限をもつことを指す．K が完備順序体であることと，K がデデキント性（K の任意の切断について下組が K に最大値をもつか上組が K に最小値をもつこと．ちなみに切断の条件からこの 2 条件の排他性が自動的に従う）をもつことは同値である．他にも "アルキメデス性 & コーシー列の収束"，"アルキメデス性 & 区間縮小法" など，完備順序体の同値な特徴づけは色々ある．

[*2] $A < B$ は $(\forall a \in A)(\forall b \in B)[a < b]$ の略記．

[*3] $A \cap \mathbb{R}, B \cap \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ は明らか．$(A \cap \mathbb{R}) \cup (B \cap \mathbb{R}) = (A \cup B) \cap \mathbb{R} = F \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$．$(A \cap \mathbb{R}) \cap (B \cap \mathbb{R}) = (A \cap B) \cap \mathbb{R} = \varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing$．$A \cap \mathbb{R} < B \cap \mathbb{R}$ は明らか．

で，特に α は A の最大値ではない．つまり $(\forall x \in A)[x \leqslant \alpha]$ でない．つまり $(\exists x \in A)[\alpha < x]$ である．そこで $\alpha' \in A$ で $\alpha < \alpha'$ をみたすものをとる．F における $\mathbb{R}$ の順序稠密性より，$\alpha < \gamma < \alpha'$ をみたす $\gamma \in \mathbb{R}$ が存在する．α の $A \cap \mathbb{R}$ における最大性より $\gamma \in B \cap \mathbb{R}$ でなければならない．B は上に閉じているので $\alpha' \in B$ である．これは $\alpha' \in A$ だったことに矛盾する． $\square$

さらに強く，任意のアルキメデス的順序体は $\mathbb{R}$ の部分順序体（と同型）になることをいいたい．命題 1 の対偶は "F がアルキメデス的ならば，$F \supsetneqq \mathbb{R}$ ではない" であって，"$F \supsetneqq \mathbb{R}$ ではない" から "$F \subseteq \mathbb{R}$ である" を結論できるかは不明なので，命題 1 はすぐには役立たない．しかしながら実際に次の命題 2 が成り立つ．当然，命題 2 を認めれば命題 1 はその系として導かれる．

命題 2. F がアルキメデス的順序体 $\iff$ $\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq \mathbb{R}$.

証明. $(\Rightarrow)$: $\mathbb{Q} \subseteq F$ は自明．$F \subseteq \mathbb{R}$ については F から $\mathbb{R}$ のある部分順序体への同型写像を切断を使って構成することで証明される．長いので，詳細は「体と Galois 理論」（藤崎源二郎）の定理 5.4 にゆずる．$(\Leftarrow)$: $\mathbb{R}$ は完備順序体なのでアルキメデス的である[*4]．ゆえに F もアルキメデス的でなければならない． $\square$

この意味で，最小のアルキメデス的順序体は $\mathbb{Q}$，最大のアルキメデス的順序体は $\mathbb{R}$ だといえる．

[*4] $\mathbb{R}$ がアルキメデス的でない，つまり $\mathbb{Z}$ が $\mathbb{R}$ で上に有界であるとする．$\mathbb{R}$ の完備性より $\mathbb{Z} \neq \varnothing$ の最小上界 $\alpha \in \mathbb{R}$ がとれる．$\alpha - 1$ は $\mathbb{Z}$ の上界でないから $\alpha - 1 < n$ をみたす $n \in \mathbb{Z}$ がとれる．すると $\alpha < n + 1 \in \mathbb{Z}$ となるが，これは α が $\mathbb{Z}$ の上界であることに反する．