

数学ノート 0002

様相論理における濾過法と有限モデル性 その 1

近藤友祐 (@elecello_)

初稿：2020 年 8 月 15 日（終戦 75 周年） 更新：2020 年 8 月 17 日

この文書の場所： <https://elecello.com/works.html>

N.B. 2020 年 8 月 17 日に大幅更新したので誤植が多いかもしれません。悪しからず……

本稿では様相論理 \mathbf{K} が有限モデル性 (finite model property) をもつこと (定理 6) を、濾過法 (filtration method) を用いて示す。またその系として \mathbf{K} の決定可能性 (系 7) が出てくる。 $\mathbf{KT}, \mathbf{KTB}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$ についても同様なことが言えるが、そのことは本稿では書かず“その 2”で書く (つもり)。ただ、基本的には同じ話で、濾過モデルにおける到達可能性関係の定義をを少し modify するだけ。

$\text{Prop} := \{p, q, r, \dots\}$ は命題変数全体を表す。論理式は A, B, C, \dots などの記号で表す。構文論については sequent 計算を前提とし、様相論理 \mathcal{L} (に対応する sequent 計算) で sequent S が証明可能であることを $\mathcal{L} \vdash S$ と書く。また、“ $\Pi \Rightarrow \Sigma$ ” の形の sequent S に対し、論理式 S を $S := \bigwedge \Pi \rightarrow \bigvee \Sigma$ と定める (字体に注意。サンセリフ体は sequent で、それに対応するアルファベットのイタリック体は対応する論理式)。論理式 A に対し、論理式の有限集合 $\text{Sub}(A)$ を、 $\text{Sub}(A) := “A$ の部分論理式全体” で定める。意味論については通常通りのクリプキ意味論を用いる。 $\mathbb{F}_{\mathbf{K}}$ はすべてのフレームからなるクラスを表す。フレームに対する妥当性やフレームクラスに対する妥当性も通常通り定義する。

本稿の内容はごく標準的なので、参考文献をはじめとした多くの様相論理の教科書の焼き直しにすぎない。

定義 1. \mathcal{L} を様相論理、 \mathbb{F} をフレームクラスとする。 \mathcal{L} が \mathbb{F} に関して完全であるとは

$$(\forall S : \text{sequent})[\mathcal{L} \vdash S \iff \mathbb{F} \models S]$$

であることをいう。 \mathcal{L} がクリプキ完全であるとは、 \mathcal{L} が何らかのフレームクラスに関して完全であることをいう。

クリプキ完全性について、例えば次が成り立つ。 :

定理 2 (\mathbf{K} のクリプキ完全性). \mathbf{K} は $\mathbb{F}_{\mathbf{K}}$ に関して完全である : $(\forall S : \text{sequent})[\mathbf{K} \vdash S \iff \mathbb{F}_{\mathbf{K}} \models S]$.

本稿では定理 2 を証明なしに用いる。定理 2 の証明にはカノニカルモデルの技法を用いる。

定義 3. 1. フレーム $F = \langle M, R \rangle$ が有限である $:\Leftrightarrow 0 < |M| < \omega$.

2. $\mathbb{F}_{\mathbf{K}}^{\text{fin}} := \{F \in \mathbb{F}_{\mathbf{K}} : F \text{ は有限フレーム}\}$.

3. 様相論理 \mathcal{L} が有限モデル性 (finite model property, FMP) をもつ

$:\Leftrightarrow (\exists \mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}_{\mathbf{K}}^{\text{fin}})[\mathcal{L} \text{ は } \mathbb{F} \text{ に対して完全}] \text{ i.e. } (\exists \mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}_{\mathbf{K}}^{\text{fin}})(\forall S : \text{sequent})[\mathcal{L} \vdash S \iff \mathbb{F} \models S]$.

ここで、“ $\exists \mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}_{\mathbf{K}}^{\text{fin}}$ ”の部分について、これはあくまでも \mathbb{F} は有限フレームからなるクラスであると言っているだけであって、必ずしも \mathbb{F} そのものが有限集合であるといっているわけではない。この二つを区別せよ。本題の \mathbf{K} の有限モデル性を示す、まず次の main lemma を濾過法を用いて示しておく。

補題 4 (有限な反例モデルの存在定理).

$$(\forall S : \text{sequent})[\mathbf{K} \not\models S \Rightarrow (\exists F^* \in \mathbb{F}_{\mathbf{K}}^{\text{fin}})[F^* \not\models S]]. \quad (1)$$

証明. $\mathbf{K} \not\models S$ とする。定理 2 より $\mathbb{F}_{\mathbf{K}} \not\models S$, すなわち

$$(\exists \langle W, R \rangle \in \mathbb{F}_{\mathbf{K}})(\exists V : \text{Prop} \rightarrow \mathcal{P}(W))(\exists w_0 \in W)[W, R, V, w_0 \not\models S] \quad (2)$$

が成り立つ。そのような W, R, V, w_0 をとり固定する。 $M := \langle W, R, V \rangle$ と定める。 $M, w_0 \not\models S$ である。

補題の結論をいうために、クリプキモデル $M^* = \langle W^*, R^*, V^* \rangle$ であって、 $0 < |W^*| < \omega$, $M^* \not\models S$ をみたすものを構成していく。

W^* の構成^{*1} まず、 W 上の関係 \sim を、各 $w, w' \in W$ について

$$w \sim w' :\Leftrightarrow (\forall A \in \text{Sub}(S))[M, w \models A \iff M, w' \models A] \quad (3)$$

とすることで入れる。これは明らかに W 上の同値関係である。そこで

$$W^* := W/\sim \quad (4)$$

と定める。各 $w \in W$ の \sim による同値類を $[w] := \{v \in W : v \sim w\}$ と書くことにする。この記法のもと $W^* = \{[w] : w \in W\}$ である。

$n := |\text{Sub}(S)|$ として $\text{Sub}(S) = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ と並べるとき、各 $w \in W$ が属する同値類は“どの i ($1 \leq i \leq n$) に対して $w \models A_i$ となっているか”という 2^n 通りの情報から完全に特定できる。よって $|W^*| \leq 2^n$ であり、 W^* は有限集合である。また W は空でないので W^* も空でない。

R^* の構成^{*2} W^* 上の二項関係 R^* を

$$[w]R^*[v] :\Leftrightarrow (\forall \Box C \in \text{Sub}(S))[M, w \models \Box C \implies M, v \models C] \quad (5)$$

で入れる^{*3}。

^{*1} お気持ちは例えば次のように説明できる：一般に、各世界 $w \in W$ について、それが充足する論理式全体の構造は複雑である。ところが S の部分論理式全体の充足状況のみに注目すると、それは高々有限通りしかありえない。つまり S の部分論理式以外の充足状況の情報をすべて捨象してしまうことで M のキメを粗くして状況を単純化している。

^{*2} お気持ちは例えば次のように説明できる：充足関係の \Box の条項（ある世界で $\Box A$ ならそこから到達可能なすべての世界で A ）を成り立たせるための最小限の到達可能関係を入れている。このおかげで Claim 2 が成り立つ。

^{*3} 少し書き方が横着なのでちゃんと書くと： $\Box C$ の形であるような任意の $B \in \text{Sub}(S)$ について、 $w \models B$ ならば $v \models C$ 。

Claim 1. R^* は well-defined である。つまり

$$(\forall w, w', v, v' \in W)[w]R^*[v] \ \& \ w \sim w' \ \& \ v \sim v' \implies [w']R^*[v']]. \quad (6)$$

(\therefore) 前提を仮定する。 $[w']R^*[v']$ を示すため、 $\text{Sub}(S)$ に属する $\Box C$ の形の論理式を勝手にとり $M, w' \models \Box C$ であると仮定する (want: $M, v' \models C$). $w \sim w'$ であるから、 \sim の定義より $M, w \models \Box C$ である。 仮定 $[w]R^*[v]$ と R^* の定義より $M, v \models C$ である。 $\text{Sub}(S)$ は部分論理式に関して閉じているから $C \in \text{Sub}(S)$ である。 このことに注意すれば $v \sim v'$ と合わせて $M, v' \models C$ である。 \dashv

V^* の構成 付値 $V^*: \text{Prop} \rightarrow \mathcal{P}(W^*)$ を、各 $p \in \text{Prop}$ と $w \in W$ に対し、

$$[w] \in V^*(p) \iff p \in \text{Sub}(S) \ \& \ w \in V(p) \quad (7)$$

とすることで定める*4。

以上で (有限な) クリプキモデル $M^* := \langle W^*, R^*, V^* \rangle$ の構成を終わる。 このように構成されたモデル M^* を、 M の $\text{Sub}(S)$ による濾過モデルという。 記法を簡略化するため、各論理式 A と各 $w \in W$ について、 $M, w \models A$ を $w \models A$ と、 $M^*, [w] \models A$ を $[w] \models^* A$ と略記する。 この定義より、任意の $p \in \text{Prop} \cap \text{Sub}(S)$ と $w \in W$ について

$$[w] \models^* p \iff w \models p \quad (8)$$

が成り立つ。 この同値性が、 R^* のうまい定義のおかげで $\text{Sub}(S)$ の論理式全体に自然に延長されていることを示すのが次の主張である：

Claim 2. $(\forall B \in \text{Sub}(S))(\forall w \in M)[w] \models^* B \iff w \models B$.

(\therefore) B の複雑さに関する帰納法。 原子論理式に関しては式 (8) そのもの。 命題結合子については $\text{Sub}(S)$ が部分論理式に関して閉じていることに注意すれば簡単に回る。 B が $\Box C$ の形であるとき。 $\text{Sub}(S)$ は部分論理式に関して閉じているので $C \in \text{Sub}(S)$ であることに注意。 (\Rightarrow): $[w] \models^* \Box C$ を仮定する。 $w \models \Box C$ を示すため wRv なる $v \in M$ を勝手に取る (want: $v \models C$). まず、 $[w]R^*[v]$ 、すなわち $(\forall \Box A \in \text{Sub}(S))[w] \models \Box A \implies v \models A$ であることは wRv より明らかである。 $[w] \models^* \Box C$ の仮定と合わせて $[v] \models^* C$ である。 帰納法の仮定を用いて $v \models C$ を得る。 (\Leftarrow): $w \models \Box C$ を仮定する。 $[w] \models^* \Box C$ を示すため $[w]R^*[v]$ なる $v \in M$ を勝手に取る (want: $[v] \models^* C$). まず、 $w \models \Box C$ と R^* の定義より $v \models C$ を得る。 帰納法の仮定を用いて $[v] \models^* C$ を得る。 \dashv

Claim 2 において特に $B = S$, $w = w_0$ (補題の証明の冒頭で固定したもの) とし、その上で略記をほどけば、

$$M^*, [w_0] \models S \iff M, w_0 \models S \quad (9)$$

*4 $p \in \text{Sub}(S) \ \& \ w \in V(p) \ \& \ w \sim w'$ なら \sim の定義より $w' \in V(p)$ なので、この定義は代表元の取り方によらない。

を得る。これと $M, w_0 \not\models S$ を合わせて $M^*, [w_0] \not\models S$ を得る。つまり、 $F^* := \langle W^*, R^* \rangle$ を証拠に $F^* \not\models S$ である。□

系 5. 任意の sequent S に対し、以下は同値である。

1. $\mathbf{K} \not\vdash S$;
2. $(\exists F \in \mathbb{F}_{\mathbf{K}}^{\text{fin}})[F \not\models S]$;
3. $(\exists F \in \mathbb{F}_{\mathbf{K}})[F \not\models S]$.

証明. (1) \Rightarrow (2) は補題 4 そのもの。(2) \Rightarrow (3) は $\mathbb{F}_{\mathbf{K}}^{\text{fin}} \subseteq \mathbb{F}_{\mathbf{K}}$ なので当然。(3) \Leftrightarrow (1) は定理 2 そのもの。□

(3) \Rightarrow (2) は、なにかと使い勝手の良い形“反例モデルがあれば有限反例モデルがある”になっている。このような性質を有限モデル性と呼ぶことも多いと思う。

定理 6. \mathbf{K} は有限モデル性をもつ。

証明. 示すべきは $(\exists \mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}_{\mathbf{K}}^{\text{fin}})(\forall S : \text{sequent})[\mathbf{K} \vdash S \iff \mathbb{F} \models S]$ であるから、

$$(\forall S : \text{sequent})[\mathbf{K} \vdash S \iff \mathbb{F} \models S] \quad (10)$$

をみたくフレームクラス $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}_{\mathbf{K}}^{\text{fin}}$ の存在をいえばよい。 $\mathbf{K} \not\vdash S$ であるような各 sequent S に対し、補題 4 で存在が保証される有限フレームのひとつを F_S^* と書くことにし、 $\mathbb{F} := \{F_S^* : \mathbf{K} \not\vdash S\} \subseteq \mathbb{F}_{\mathbf{K}}^{\text{fin}}$ と定める。この \mathbb{F} が式 (10) をみたく：任意の sequent S に対し、

$$\mathbf{K} \not\vdash S \implies F_S^* \not\models S \implies \mathbb{F} \not\models S, \quad (11)$$

$$\mathbf{K} \vdash S \implies \mathbb{F}_{\mathbf{K}} \models S \implies \mathbb{F} \models S. \quad (12)$$

ここに、上段の第一の含意は F_S^* の取り方に、下段の第一の含意は定理 2 に、第二の含意は $\mathbb{F}_{\mathbf{K}} \supseteq \mathbb{F}$ であることによる。□

有限モデル性のおかげで、次の重要な性質が成り立つ：

系 7 (\mathbf{K} の決定可能性). \mathbf{K} は決定可能である。すなわち、次を満たすような、有限時間で停止するプログラム \mathcal{P} が存在する：各 sequent S に対し、

$$\begin{cases} \mathbf{K} \vdash S \implies \mathcal{P}(S) = \text{Yes}, \\ \mathbf{K} \not\vdash S \implies \mathcal{P}(S) = \text{No}. \end{cases} \quad (13)$$

証明. 次のようなプログラム $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ を交互に 1 ステップずつ走らせるプログラムを \mathcal{P} とすればよい ($\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ それぞれ単独では止まらない可能性があるが、どちらか 1 つは必ず止まるので \mathcal{P} は止まる)。

\mathcal{P}_1 : $\mathbf{K} \vdash S$ の判定プログラム 証明図を (例えば Gödel 数の小さい順に) 枚挙していき、それが S が終式であるような証明図になっているかチェックする (各証明図について、それが「 S が終式であるような証明図になっているか」は有限的に判定可能)。そうなら YES を返す。

\mathcal{P}_2 : $\mathbf{K} \Vdash S$ の判定プログラム 系 5 より, $\mathbf{K} \Vdash S$ であることは S を偽にする有限フレームが存在することと同値なので, 後者を調べればよい. 有限なフレームを (例えば世界数が少ない順に, 同型を除いて) 枚挙していき, S を偽にする付値があるかチェックする (S に現れる命題変数以外に対する付値の値はどうでもいいので, 調べるべき付値は有限通りしかない. したがってそれが「 S を偽にするフレームになっているか」は有限的に判定可能). そうなら No を返す. \square

さて, $\mathbf{KT}, \mathbf{KTB}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$ についても有限モデル性や決定可能性が成り立つ. ただし, 濾過法で作るフレームに (例えば) 推移性などの性質を保証するために, 補題 4 における R^* の定義を多少修正する必要がある. “その 2” で書きます.

参考文献

- [1] 小野寛晰, 情報科学における論理, 日本評論社, 1994.
- [2] 佐野勝彦, 様相論理入門, In: 菊池誠編, 数学における証明と真理, 共立出版, 2016.