圏論ノート 000　積とイコライザで極限を作る

近藤友祐 (`@elecello_`)

初稿: 2019 年 10 月 25 日　更新: 2019 年 10 月 28 日
この文書の場所： `https://elecello.com/works.html`

本稿では，圏 $\mathbf{D}$ の対象全体のクラスを $\mathrm{ob}(\mathbf{D})$, 射全体のクラスを $\mathrm{arr}(\mathbf{D})$ と書くことにする．

定理 1. $\mathbf{C}$ を，任意の (集合サイズの) 積とイコライザをもつ圏，$\mathbf{J}$ を small な圏とする (i.e. $\mathrm{ob}(\mathbf{J})$ も $\mathrm{arr}(\mathbf{J})$ も集合)．このとき，$\mathbf{C}$ は任意の図式 $D\colon \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ に対する極限を持つ．

Proof. $\mathbf{C}$, $\mathbf{J}$ を仮定のようなものとし，図式 $D\colon \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ を任意にとる．以降，慣例にならって，$\mathbf{J}$ の射 $u\colon i \to j$ の D での像を $D_u\colon D_i \to D_j$ などと書くことにする．

$\mathrm{ob}(\mathbf{J})$ は集合だから離散圏とみなせる．それを $\mathbf{J}_0$ と書くことにする．すなわち $\mathrm{ob}(\mathbf{J}_0) = \mathrm{ob}(\mathbf{J})$, $\mathrm{arr}(\mathbf{J}_0) = \{1_j : j \in \mathrm{ob}(\mathbf{J})\}$ (ただし 1_j は形式的に付け加えられた恒等射) である．函手 $F\colon \mathbf{J}_0 \to \mathbf{C}$ を，$j \in \mathrm{ob}(\mathbf{J}_0)$ に対し $F(j) = D_j$ とすることで定める (射の行き先の定め方は明らか)．定理の仮定により，F の極限が存在する．つまり，$P \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ と $\{p_j \in \mathbf{C}(P, F(j)) : j \in \mathrm{ob}(\mathbf{J})\} \subseteq \mathrm{arr}(\mathbf{C})$ の二つ組であって

$$(\forall X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C}))(\forall \text{family } \{f_j \in \mathbf{C}(X, F(j)) : j \in \mathrm{ob}(\mathbf{J})\})(\exists! v\colon X \to P)(\forall j \in \mathrm{ob}(\mathbf{J}))(p_j \circ v = f_j) \tag{1}$$

を満たすものが存在する．定義にしたがって $F(j)$ を D_j と書き換えると見やすくなるかもしれない．

同様に，$\mathrm{arr}(\mathbf{J})$ は集合だから離散圏とみなせる．それを $\mathbf{J}_1$ と書くことにする．すなわち $\mathrm{ob}(\mathbf{J}_1) = \mathrm{arr}(\mathbf{J})$, $\mathrm{arr}(\mathbf{J}_1) = \{1_u : u \in \mathrm{arr}(\mathbf{J})\}$ (ただし 1_u は形式的に付け加えられた恒等射) である．函手 $G\colon \mathbf{J}_1 \to \mathbf{C}$ を，$u \in \mathrm{ob}(\mathbf{J}_1)$ に対し $G(u) = D_{\mathrm{cod}(u)}$ とすることで定める (射の行き先の定め方は明らか)．定理の仮定により，G の極限が存在する．つまり，$Q \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ と $\{q_u \in \mathbf{C}(Q, G(u)) : u \in \mathrm{arr}(\mathbf{J})\} \subseteq \mathrm{arr}(\mathbf{C})$ の二つ組であって

$$(\forall Y \in \mathrm{ob}(\mathbf{C}))(\forall \text{family } \{g_u \in \mathbf{C}(Y, G(u)) : u \in \mathrm{arr}(\mathbf{J})\})(\exists! w\colon Y \to Q)(\forall u \in \mathrm{arr}(\mathbf{J}))(q_u \circ w = g_u) \tag{2}$$

を満たすものが存在する．定義にしたがって $G(u)$ を $D_{\mathrm{cod}(u)}$ と書き換えると見やすくなるかもしれない．

弁解. こんなことをネチネチと書いた理由を弁解しておく．Awodey 本 [1]，レンスター本 [3] では，本稿の Q に相当するものはだいたい

$$[\text{Awodey}] \prod_{(u\colon i \to j) \in \mathbf{J}_1} D_j \qquad\qquad [\text{レンスター}] \prod_{\mathbf{J} \text{ の } i \xrightarrow{u} j} D(j) \tag{3}$$

と一言書かれているだけでほとんど説明がない．これでは意味不明というか，誤解が生じかねないのであまり良くないと思う．なので，ここでカッチリと定義しておきたかったのである．(弁解終)

Claim 1. $(\exists! \varphi\colon P \to Q)(\forall u \in \mathrm{arr}(\mathbf{J}))(q_u \circ \varphi = p_{\mathrm{cod}(u)})$.

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[d, dashed, "\varphi"'] \arrow[dr, "p_{\mathrm{cod}(u)}"] & \\
Q \arrow[r, "q_u"'] & G(u) = D_{\mathrm{cod}(u)}
\end{tikzcd}
$$

$(\because)$ Q の普遍性 (2) において特に $Y := P$，各 $u \in \mathrm{arr}(\mathbf{J})$ に対して $g_u := p_{\mathrm{cod}(u)}$ として得られる w を φ とすればよい． □(Claim 1)

Claim 2. $(\exists! \psi\colon P \to Q)(\forall u \in \mathrm{arr}(\mathbf{J}))(q_u \circ \psi = D_u \circ p_{\mathrm{dom}\, u})$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[dl, "p_{\mathrm{dom}(u)}"'] \arrow[dd, dashed, "\psi"] \\
 & D_{\mathrm{dom}(u)} \arrow[dl, "D_u"'] & \\
D_{\mathrm{cod}(u)} = G(u) & & Q \arrow[ll, "q_u"]
\end{tikzcd}
$$

$(\because)$ Q の普遍性 (2) において特に $Y := P$，各 $u \in \mathrm{arr}(\mathbf{J})$ に対して $g_u := D_u \circ p_{\mathrm{dom}(u)}$ として得られる w を ψ とすればよい． □(Claim 2)

Claim 1 と Claim 2 で得られた平行射 φ, ψ に対し，定理の仮定によってそれらのイコライザ (E, e) が存在する．各 $j \in \mathrm{ob}(\mathbf{J})$ に対し，$e_j := p_j \circ e$ と定める．

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "e_j"'] & P \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] \arrow[d, "p_j"] & Q \\
 & D_j . &
\end{tikzcd}
\tag{4}
$$

$\mathsf{E} := \left\langle E,\ \{e_j \in \mathbf{C}(E, D_j) : j \in \mathrm{ob}(\mathbf{J})\}\right\rangle$ が D の極限錐であることを示して証明を完了する．まずは錐であることを示す：

Claim 3. E は D への錐である．すなわち，$\mathbf{J}$ の任意の射 $u\colon \mathrm{dom}(u) \to \mathrm{cod}(u)$ に対し，$D_u \circ e_{\mathrm{dom}(u)} = e_{\mathrm{cod}(u)}$ が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl, "e_{\mathrm{dom}(u)}"'] \arrow[dr, "e_{\mathrm{cod}(u)}"] & \\
D_{\mathrm{dom}(u)} \arrow[rr, "D_u"'] & & D_{\mathrm{cod}(u)}
\end{tikzcd}
$$

$(\because)$ 下の可換図式より明らか．中央の五角形は e が φ と ψ のイコライザであるから可換．右と左の三角形の可換性は φ, ψ のとり方 (Claim 1 と Claim 2) から可換.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & E \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "e"] \arrow[ddll, bend right, "e_{\mathrm{dom}(u)}"'] \arrow[dddrr, bend left, "e_{\mathrm{cod}(u)}"] & & \\
 & & P \arrow[dl, "p_{\mathrm{dom}(u)}"'] \arrow[dd, "\psi"] & & P \arrow[dd, "\varphi"'] \arrow[ddr, "p_{\mathrm{cod}(u)}"] & \\
 & D_{\mathrm{dom}(u)} \arrow[dl, "D_u"'] & & & & \\
D_{\mathrm{cod}(u)} \arrow[rrrrr, bend right, equal] & & Q \arrow[ll, "q_u"'] \arrow[rr, equal] & & Q \arrow[r, "q_u"] & D_{\mathrm{cod}(u)}
\end{tikzcd}
$$

□(Claim 3)

最後に，この E が極限錐であること，すなわち，D への錐 R $= \left\langle R,\ \{r_j \in \mathbf{C}(R, D_j) : j \in \mathrm{ob}(\mathbf{J})\}\right\rangle$ を勝手にとったとき，

$$(\exists! h\colon R \to E)(\forall j \in \mathrm{ob}(\mathbf{J}))(e_j \circ h = r_j) \tag{5}$$

が成り立つことを示す．まず，

$$(\forall j \in \mathrm{ob}(\mathbf{J}))(p_j \circ k = r_j) \tag{6}$$

を満たす唯一の射 $k\colon R \to P$ がとれる (P の普遍性 (1) において特に $X := R$，各 $j \in \mathrm{ob}(\mathbf{J})$ に対して $f_j := r_j$ として得られた v を k とすればよい)．

Claim 4. $(\forall u \in \mathrm{arr}(\mathbf{J}))(q_u \circ \varphi \circ k = r_{\mathrm{cod}(u)} = q_u \circ \psi \circ k)$.
($\because$) 下の可換図式より明らか．右の三角形は Claim 2 (ψ のとりかた)．左側の四つの三角形については上から順に：式 (6) / R は錐 / 式 (6) / Claim 1 (φ のとりかた)．

$$
\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[d, "p_{\mathrm{dom}(u)}"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
R \arrow[urr, "k"] \arrow[rr, "r_{\mathrm{dom}(u)}"] \arrow[drr, "r_{\mathrm{cod}(u)}"'] \arrow[d, "k"'] & & D_{\mathrm{dom}(u)} \arrow[d, "D_u"'] & Q \arrow[dl, "q_u"] \\
P \arrow[rr, "p_{\mathrm{cod}(u)}"] \arrow[d, "\varphi"'] & & D_{\mathrm{cod}(u)} & \\
Q \arrow[urr, "q_u"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

□(Claim 4)

さて，$(\forall u \in \mathrm{arr}(\mathbf{J}))(q_u \circ l = r_{\mathrm{cod}(u)})$ を満たす射 $l\colon R \to Q$ は唯一つしか存在しない (Q の普遍性 (2) で $Y := R$, $g_u := r_{\mathrm{cod}(u)}$ として得られた w を l とせよ)．Claim 4 により $\varphi \circ k$ と $\psi \circ k$ は l の資格を満たす射になっているので $\varphi \circ k = \psi \circ k$ である．したがって，E のイコライザ性によって，

$$e \circ h = k \tag{7}$$

を満たすただ一つの射 $h\colon R \to E$ をとることができる．

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & P \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & Q. \\ R \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "k"'] & & \end{tikzcd}$$

$e \circ h = k$ と式 (6)，および e_j の定義 $e_j := p_j \circ e$ を合わせて

$$(\forall j \in \mathrm{ob}(\mathbf{J}))(e_j \circ h = r_j) \tag{8}$$

を得る．よって式 (5) における h の存在が示せた．一意性について．$t\colon R \to E$ が $(\forall j \in \mathrm{ob}(\mathbf{J}))(e_j \circ t = r_j)$ を満たすとする．e_j の定義 $e_j = p_j \circ e$ より $(\forall j \in \mathrm{ob}(\mathbf{J}))(p_j \circ e \circ t = r_j)$ である．k の唯一性 (6) により，$e \circ t = k$ でなければならない．h の唯一性 (7) より $t = h$ である． □

系 2. $\mathbf{C}$ を，終対象と二項積とイコライザをもつ圏，$\mathbf{J}$ を有限圏 (i.e. $\mathrm{ob}(\mathbf{J})$ も $\mathrm{arr}(\mathbf{J})$ も有限) とする．このとき，$\mathbf{C}$ は任意の図式 $D\colon \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ に対する極限を持つ．

Proof. “終対象と二項積＝有限積” に注意すれば，定理 1 の “集合サイズ” を “有限” に変えて全く同じ証明が通る． □

系 3.

1. $\mathbf{C}$ を，任意の (集合サイズの) 余積とコイコライザをもつ圏，$\mathbf{J}$ を small な圏とする (i.e. $\mathrm{ob}(\mathbf{J})$ も $\mathrm{arr}(\mathbf{J})$ も集合)．このとき，$\mathbf{C}$ は任意の図式 $D\colon \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ に対する余極限を持つ．
2. $\mathbf{C}$ を，始対象と二項余積とコイコライザをもつ圏，$\mathbf{J}$ を有限圏 (i.e. $\mathrm{ob}(\mathbf{J})$ も $\mathrm{arr}(\mathbf{J})$ も有限) とする．このとき，$\mathbf{C}$ は任意の図式 $D\colon \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ に対する余極限を持つ．

Proof. 双対． □

参考文献

[1] Awodey, S., *Category Theory* (2nd ed.), Vol. 52. Oxford Logic Guides, Oxford University Press, 2008.
[2] Bell, J. L., *Toposes and Local Set Theories: An Introduction*, Dover Books on Mathematics, 2008.
[3] T. レンスター (斎藤恭司 監修，土岡俊介 訳), ベーシック圏論 普遍性からの速習コース, 丸善出版, 2017.