数を作る

第 7 回 旭丘数理科学部交流会

於 旭丘コミュニティセンター

近藤 友祐

神戸大学大学院システム情報学研究科 博士課程前期課程 1 年
愛知県立旭丘高等学校 第 66 期卒業生

2019 年 3 月 30 日版

これはなに？

このスライドは、2019 年 3 月 30 日開催の「第 7 回旭丘数理科学部交流会」で用いる (用いた) スライドの一部を改変・削除・追加したものの、プリンタフレンドリー版です。今後、削除部分を復活させたりするなど、新しい版をアップロードする可能性があります。主な改変部分：♣ 印

ご案内

- スライドの場所：https://elecello.com/works
- もしよければダウンロード！
- ノート取らなくてOK
- 気になったところだけメモしてね！

自己紹介

- 近藤 友祐 (KONDO, Yusuke)
  - Webpage: https://elecello.com
  - Twitter: https://twitter.com/elecello_
- 神戸大学 システム情報学研究科 修士 1 年
  - 専攻：数学基礎論・数理論理学
  - 旧所属：同工学部・電気電子工学科
- 旭 66 期
  - 震災の年に入学
  - 弦楽部 (チェロ)・有志団体ただの女装癖 (長門)
  - 物理同好会と電気部は幽霊
  - 旭苑 62「旭丘への数学」T 君と共著
  - 機材委
  - 分科会の講師常連

注意

平易に話したいけど難しい話もある

- わからなくても気にしないで、
- わかったら喜んで。
- 高度な話題：★印
- 脚注 [*1] は基本読まなくて OK

[*1] こんなの。長ったらしいので興味ある人は後で読んで。

記法(1)

- $\mathcal{N}$ = 自然数全体 $= \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ Natural
- $\mathcal{Z}$ = 整数全体 Zahlen「数」のドイツ語
- $\mathcal{Q}$ = 有理数全体 Quotient
- $\mathcal{R}$ = 実数全体 Real
- $\mathcal{C}$ = 複素数全体 Complex

最小の自然数は 0 と約束。その方が理論が綺麗。

記法 (2)

“あくまでもこの発表では”

- 異なる意味で $\mathbf{N}$ なども使用
- $\mathcal{N}$ などと $\mathbf{N}$ などの区別が本質 [*1]

[*1] $\mathcal{N}$ などは「素朴な数概念」、$\mathbf{N}$ などは「“集合として実装された数”の集合」の意味で用いる。この記法は標準的ではなく、本講義だけで用いる便宜的なもの。31 頁を参照。

目次

第1部
数(かず)がわからない

クイズ(1/5)

第 1 問 (レベル：数学 II)

$\sqrt{-3}$とは？

解答例

2 乗して -3 になる数の一つ。

クイズ(2/5)

第 2 問 (レベル：中 3)

$\sqrt{3}$ とは？

解答例

2 乗して 3 になる正の数。

クイズ(3/5)

第 3 問 (レベル：小 5)

$\dfrac{3}{5}$とは？

解答例

$3 \div 5$のこと。

クイズ(4/5)

第 4 問 (レベル：中 1)

-3 とは？

解答例

$0-3$ のこと。

クイズ(5/5)

第 5 問 (レベル： ？)

3 とは？

解答例

？

さっきの全部ダメ

$3\ (\in \mathcal{N})$ がわからないなら

- $-3\ (\in \mathcal{Z})$
- $3/5\ (\in \mathcal{Q})$
- $\sqrt{3}\ (\in \mathcal{R})$
- $\sqrt{-3}\ (\in \mathcal{C})$

全部わからん。

なぜ数を疑う？

初期の微積分学

- 無限小は直感任せ
- 数学者も間違える
- 批判の声。厳密化しないと…
- 根底にあるのが実数

実数とは何か

復習：実数の「定義」

高校では「数の表し方」に着目：

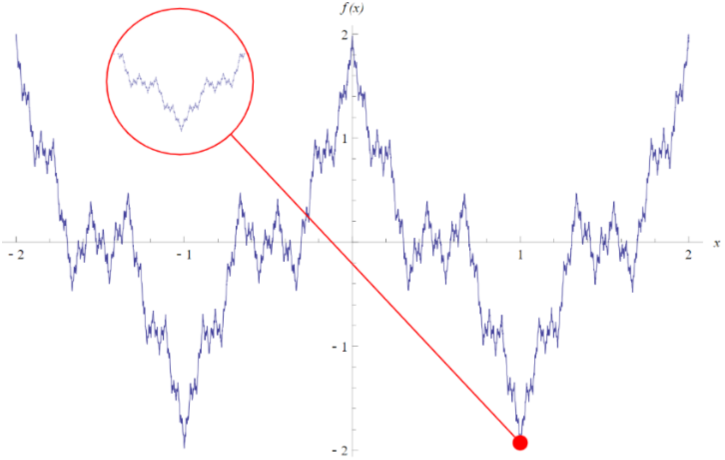
- 実数
  - 有理数
    - 整数
    - 有限小数
    - 循環小数
  - 無理数 $=$ *循環しない無限小数* ＝ *非・有理数*

（循環小数・循環しない無限小数：*無限小数*）

- 「数＝数字」の (アヤシイ) 価値観

厳密で使い勝手の良い実数の定義が欲しい

ワイエルシュトラス関数(1872)



出典：https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/60/WeierstrassFunction.svg

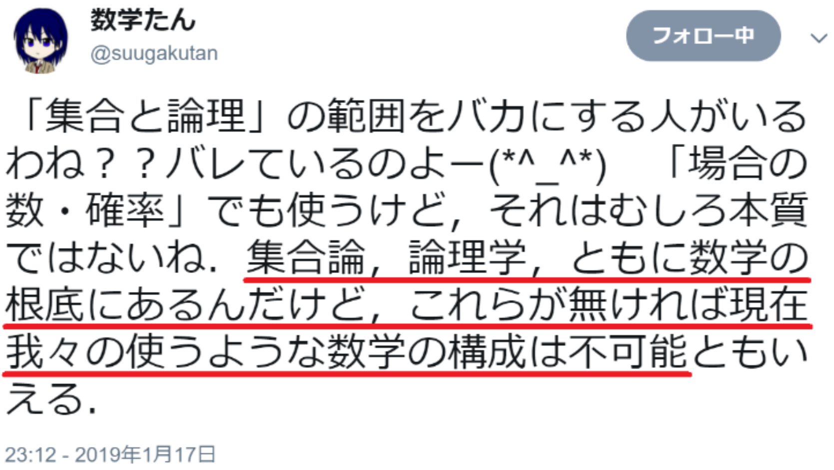
どの点でも連続だが、どの点でも微分不可能

第2部
数(かず)をわかりたい

厳密化

- 実数がわからないので
- 単純な自然数から順に
- 数の世界を厳密化
- 武器は「論理と集合」

目標：このツイートを理解する


数学たん
@suugakutan
フォロー中

「集合と論理」の範囲をバカにする人がいるわね？？バレているのよー(*^_^*)　「場合の数・確率」でも使うけど，それはむしろ本質ではないね．集合論，論理学，ともに数学の根底にあるんだけど，これらが無ければ現在我々の使うような数学の構成は不可能ともいえる．

23:12 - 2019年1月17日

出典：https://twitter.com/suugakutan/status/1085902564812500993

有限な論理で無限を捉える

公理的集合論による「数学の基礎付け」[*1*2]

- 完全に有限的な形式論理で
- 無限の世界をシミュレーション。
- すべての数学的対象を集合として表現し
- それらが望ましく振舞うことを示す。
- この論法で「無限」の曖昧性を完全に排除。

[*1]今後、「公理的」は省略

[*2]★ この箇条書きはおおよそヒルベルト計画の第一段階にあたり、歴史的に終了済み。「p か p の否定の丁度片方のみ必ず形式的に証明可能」という「無矛盾性・完全性」の証明を第二第三段階とするが、この二つはゲーデルの不完全性定理によってある意味で頓挫。

$\varnothing$ から天地創造

考え方 数学的存在＝“$\varnothing$ から作った集合”

例

- 「数」も「演算」も「不等号」もそれ自身が集合
- 「2 という集合」「+ という集合」「$\leqq$ という集合」
- $1 \leqq 2$ という数に関する命題は、
  次の集合に関する命題の略記にすぎない[*1]：

$$\{\{\{\varnothing\}\},\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\} \in \leqq$$

[*1] 集合に関する記号 $\in, \subset$ やカンマ・中括弧自体も集合か？と思った人はかなり鋭い。この世界に向いてます。ここでは説明しませんが…。

★集合論的数学のルール ZFC

数学では次のルール以外使っちゃダメ [*1]：

(0) 空集合が存在する
(1) $A \subset B$ かつ $A \supset B \iff A = B$
(2) $A \ni B \ni C \ni D \ni \cdots$ のような無限列は作れない
(3) 全体集合 U 及び x に関する条件 p から、$\{x \mid p$ は真$\}$ を作ってよい
(4) A と B から $\{A, B\}$ を作ってよい
(5) $A, B, C, \ldots$ から $A \cup B \cup C \cup \cdots$ を作ってよい
(6) 関数の値域は集合
(7) 帰納的集合が存在する
(8) べき集合 (部分集合全体の集合) を作ってよい
(9) $A, B, C, \ldots$ から $a, b, c, \ldots$ を選んで $\{a, b, c, \ldots\}$ を作ってよい

[*1] 無限概念を用いているように見える (点々記号とか) が、これらは有限的に表現できます。尚、かなり不正確な言い換えをしています。正確な議論は集合論の教科書を読んでください。また (3)(6) は公理図式です。

★ ZFC の能力

- 一見貧弱だが実はメッチャ強い
- 原理上数学のすべてを証明可能
  - 実はオーバーキルで、
  - 定理を個別に見れば ZFC のごく一部以外不要
  - フルの ZFC は集合論独自の世界を描く [*1]

[*1] 集合論特有の無限組み合わせ論の問題などなど。現在は数学の基礎付けとしての役割に注目することは少なく、集合論の研究対象は集合論特有の問題に移っている。

第3部　数の構築

[注] 以降現れる全ての概念は、「集合語」に翻訳して有限的な形式論理に還元可能。今後現れる「無限」には一切曖昧性は無い。

！注意！

今からやるのは

「「「数学基礎論」の序章」の序章」

的なもので、今や数学系の学生の常識。

現代の数学基礎論はこういうのをネチネチする分野ではない！

「数の構築」とは？

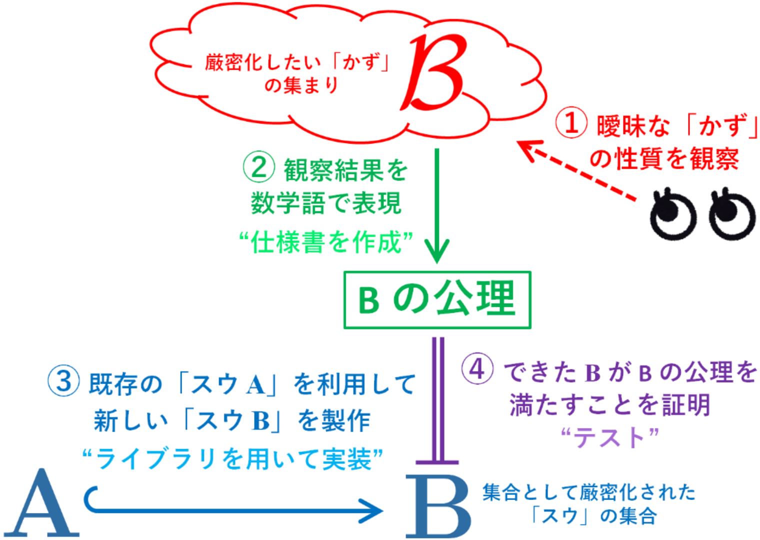
- 我々が直観的にふんわり知っている“かず” (例：3 in $\mathcal{N}$) を
- 集合というちゃんとした数学的実体“スウ” (例：$\mathbf{3} \in \mathbf{N}$) として作り直す。
- フォントの違いに注意！
- これを「曖昧な数の厳密化」とみなす[*1]

[*1] これが「厳密化」のあるべき姿なのか？という議論の余地は十分にある。

全体像


ドミノ
物を数える
借金
マイナス
ピザの切り分け
分数
連続的な物理量
みっちり数直線
虚数？
N Z Q R C
曖昧な実体
(かず)
数学で表現したい曖昧な“もの”
性質の抽出(公理化)
厳密な集合論的数学の世界
ペアノの公理
最小の順序環
最小の順序体
完備順序体
実数体を含む最小の代数的閉体
数学的性質
(公理)
公理的集合論
フォン・ノイマンの構成
グロタンディーク群
商体
コーシー完備化
√−1 添加 or 代数閉包
充足
∅ N Z Q R C
数学的実体
(スウ)

基本思想


厳密化したい「かず」
の集まり
$\mathcal{B}$
① 曖昧な「かず」
の性質を観察
② 観察結果を
数学語で表現
“仕様書を作成”
B の公理
③ 既存の「スウ A」を利用して
新しい「スウ B」を製作
“ライブラリを用いて実装”
④ できた B が B の公理を
満たすことを証明
“テスト”
A
B
集合として厳密化された
「スウ」の集合

♣「$\mathcal{X}$・X の公理・$\mathbf{X}$」の三者関係について

このスライドと次のスライドは放言みたいなものです。

この発表で採った価値観 ($\sharp$ と呼ぶことにする) は、「最初に曖昧な数概念 $\mathcal{X}$ があり、その性質を観察してそれらを X の公理として打ち立て、集合論の内部で X の公理を充足するような (同型を除き唯一つの) 構造 $\mathbf{X}$ を (遺伝的) 集合として実装する」という (ある種の偏った) 価値観。厳密な数学とは X の公理と $\mathbf{X}$ のことであり、$\mathcal{X}$ はどこか非数学的なものであると考えている。他には次のようなものが考えられると思う：

1. $\sharp$ で、集合論の公理化までは考えない立場。以下に並べるものの多くも集合論の公理化までは考えていない。
2. 集合論による厳密化 (形式化？) などを全く考えない高校までの立場。そこでは数といえば $\mathcal{X}$ のことであって、$\mathcal{X}$ では何らかの性質 (例えば足し算の交換法則) が成り立つわけだが、それは「X の公理」ではなく「X の性質」と呼ばれる (そもそも高校までで公理という言葉は習うっけ？)。算数や数学で扱うのは「$\mathcal{X}$ と X の性質」であって、$\mathbf{X}$ などというものはそもそも考えない。さらに踏み込んで言えば、高校までは集合論的な意識をすることがほとんどないので、$\mathcal{X}$ を実体として認識することはほとんど無い。具体的に言えば、例えば「$n \in \mathbb{N}$」ではなく「n は自然数」という言い回しをするのが普通 (そもそも $\mathbb{N}$ という記号を習わない)。また、この立場で実数の完備性を議論するにはかなり無理があるが、完備性を考える場面などほとんど無いので問題ない。しかし指数関数の指数部の無理数への拡張やネイピア数の定義あたりで暗に用いられている。
3. 数学で使っている $\mathcal{X}$ とは $\mathbf{X}$ のことだったのだ、と考える (多分多数派の) 価値観。$\mathcal{X}$ は最初から数学の世界に属するものであり、普段それを使って数学を展開しているが、ちょっと怪しいので念のため集合論的に $\mathbf{X}$ を作ってみる。そこで $\mathcal{X}$ を $\mathbf{X}$ で再定義する。その後は $\mathcal{X}$ と $\mathbf{X}$ の区別など不要になるので、$\mathcal{X}$ の直観に沿って数学を展開すればよい。実数の完備性については、それを公理と呼ぶ人もあれば性質と呼ぶ人もいるので、「X の公理」と「X の性質」の間には多少のニュアンスの違いしかないのだろう。用心深い人は一度 $\mathbf{R}$ が完備性を満たすことの証明を追うであろうが、そこまでする人はあまりいない気がする。
4. X の公理に重きを置く立場 (公理的方法？)。「X の公理を満たすもの」が何であるかなどどうでも良くて、X の公理から演繹されるものこそが数学的真理であると考える立場 (いわば $\vdash$ ベースの数学、$\models$ などどうでもいい)。
5. (そのうち追記します)

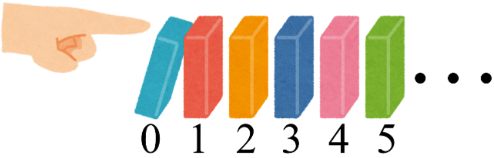
♣ cont.

ただし、数学基礎論の議論では、少なくとも $\mathcal{N}$ と $\mathbf{N}$ は別物であると考えなければならない。$\mathcal{N}$ とはいわゆるメタな自然数の集まりのことで、例えば (メタな) 論理式の論理記号の「数」に関する帰納法を回すときの「数」とは $\mathcal{N}$ の要素である。$\mathbf{N}$ とは形式化された公理的集合論の中の ω のことである。また、$\mathcal{N}$ を「完結した実体」と考える必要はない。これは丁度「素数は無限に存在する」といった時に、「無限集合 $\{p : p$ は素数 $\}$ が存在する」ではなく「与えられた任意の自然数に対してそれより大きい素数が存在する」と解釈しても何ら問題がないというような状況にたとえられようか。

[N1] "素朴な$\mathcal{N}$" の観察

自然数のイメージを洗い出す

- 起点がある離散的な半直線
- ドミノ倒しで全部倒れる [*1] (数学的帰納法)



[*1] ★ 例えば順序数 $\omega + \omega$ も離散的な半直線だが、前半しか倒れてくれない。「全部倒れる」が自然数の本質的なところ。

[N2] 自然数の公理化

イメージを基に数学語で仕様書を書く

★ ペアノの公理 (Dedekind–Peano postulates/axioms)[*1]

集合 N と N 上の演算 $'$ および N の要素 o の三つ組 $(N, ', o)$ についての以下の三条件をペアノの公理という。

P1　o は演算 $'$ の値域に属さない。

P2　演算 $'$ は単射。

P3　(数学的帰納法) N の任意の部分集合 P について

- $o \in P$
- N の任意の要素 n に対し、「$n \in P$ ならば $n' \in P$」

が満たされるならば $P = N$ である。

[*1] ★ $o \in N$ と "$n \in N$ なら $n' \in N$" を合わせて五条件とする書物も多いが、上ではこの二条件は前置きに含まれている。また、上述の形式のペアノの公理とペアノ算術 (Peano Arithmetic, PA) を混同している書物があるが、両者は明確に異なる (略すと両方 PA なのが誤解のもとだと思う。なので私は "postulate" を使う)。雑に言えば、前者は二階、後者は一階の公理系。PA では P3 が $\varphi(o) \wedge \forall n(\varphi(n) \to \varphi(n')) \to \forall n \varphi(n)$ の形の公理図式になるが、このため「任意の部分集合」に関する帰納法公理は記述できず「算術の論理式で定義可能な部分集合」に関する帰納法公理のみに制限される。両者の区別は専門的にかなり重要だが、一般向けの本では結構いい加減になっているものもある。ネットでも一つの用語が人によって別の意味で使われている場合が散見される。このあたりを勉強するときは要注意。

[N3] "数学的な$\mathbf{N}$" の製作

手持ちアイテムを駆使して自然数を実装

アイテム：今は $\varnothing$ と集合操作だけ

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \varnothing \\
\mathbf{1} &= \{\mathbf{0}\} = \{\varnothing\} \\
\mathbf{2} &= \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
\mathbf{3} &= \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\
\mathbf{4} &= \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\} = \text{たいへん} \\
&\vdots \\
\mathbf{N} &= \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \ldots\}^{*1}
\end{aligned}
$$

[*1] フォン・ノイマンの構成法。★ $\mathbf{N}$ ではなく ω と書くことが多い。ω 自体も数として扱いたくなりませんか？ 順序数で検索。

[N3]' 追加開発

- 和と積 $+, \times$, 大小関係 $\leqq$ も作れる [*1]
- 当然 $+, \times, \leqq$ はそれ自身が集合
  例：$\{\{\{\{\{\varnothing\}\}\}\}, \{\{\{\{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} \in +$ が成立
  意味：$\mathbf{1+1=2}$
- 負数や分数が出るので $-, \div$ はムリ [*2]

[*1] 漸化式によって定義すればよいが、「$\mathbb{N}$ 上では漸化式による定義が可能」という事実は証明が必要。証明は大変。

[*2] ★「もどき」は作れる。“Monus” で検索。

[N4] 条件チェック

仕様を満たしているかテスト

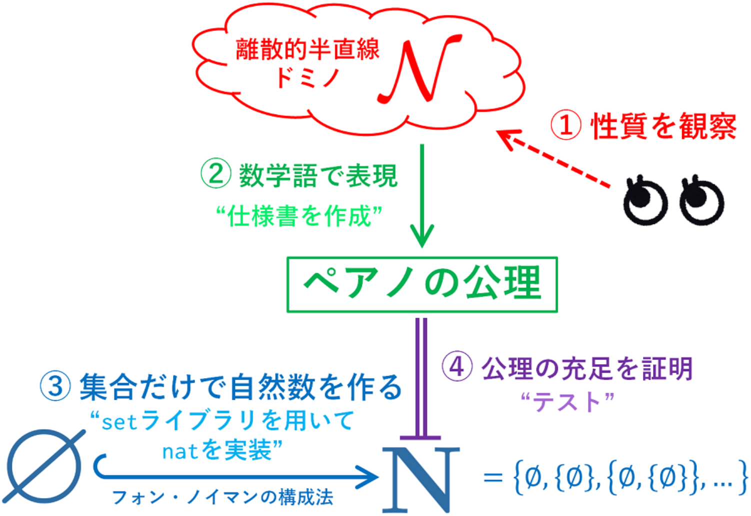
- $(\mathbf{N}, s, \mathbf{0})$ はペアノの公理を満たす [*1]
- しかもそのような唯一のもの [*2]
  - ペアノの公理は "自然数" を完璧に捉えている！
- $+, \times, \leq$ の性質 (交換法則等) も証明できる [*3]

[*1] $s(n) = n \cup \{n\}$

[*2] ★ i.e. ペアノの公理を満たす構造はすべて $(\mathbf{N}, s, \mathbf{0})$ と同型。
対比的に、PA にはこれと同型でないモデル (超準モデル) がある。

[*3] 証明は思ったより面倒。

自然数まとめ


離散的半直線
ドミノ
$\mathcal{N}$
① 性質を観察
② 数学語で表現
“仕様書を作成”
ペアノの公理
④ 公理の充足を証明
“テスト”
③ 集合だけで自然数を作る
“setライブラリを用いて
natを実装”
$\emptyset$
フォン・ノイマンの構成法
$\mathbb{N}$
$= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots\}$

[Z1] “素朴な $\mathcal{Z}$” の観察

$\boxed{\text{整数のイメージを洗い出す}}$

- 自然数に負の数をくっつけたの
- 加減乗
- 大小

[Z2] 整数の公理化

イメージを基に数学語で仕様書を書く

★ 整数の公理

整数全体とは、その非負元全体が自然数の構造と同型であるような順序環のことである [*1]。

[用語のイメージ]

- 同型　構造が同じで区別できない
- 環　$+, -, \times$ ができる
- 順序　演算と矛盾しない大小関係がある
  - $a \leqq b,\ 0 \leqq c \Longrightarrow ac \leqq bc$ とか

[*1] ★ 以降、単に環といえば、可換で $0 \neq 1$ なものだけを指すものとする。

[Z3] "数学的な Z" の製作 (1)

手持ちアイテムを駆使して整数を実装

アイテム：集合操作・自然数と $+, \times, \leq$ だけ

考え方 付け足したい数は無理やり付け足す

自然数しか知らない人が負数を表すには
$\rightsquigarrow$ 収入・支出の対[*1] を「数」だと思う

$$3\text{円の赤字} = (5\text{円の収入}, 8\text{円の支出})$$

自然数だけで負数が表せた。屁理屈？

---

*1 「対」の集合語での表現：$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ (クラトフスキの定義)。
"$(a, b) = (c, d) \iff a = c$ かつ $b = d$" などが証明できる。

[Z3] "数学的な $\mathbf{Z}$" の製作 (2)

赤字 3 の収支表はたくさんあるので

$$\begin{aligned} \mathbf{-3} &= \text{赤字 3 の収支表を全部まとめたもの} \\ &= \{(\mathbf{0},\mathbf{3}),\ (\mathbf{1},\mathbf{4}),\ (\mathbf{2},\mathbf{5}),\dots\} \end{aligned}$$

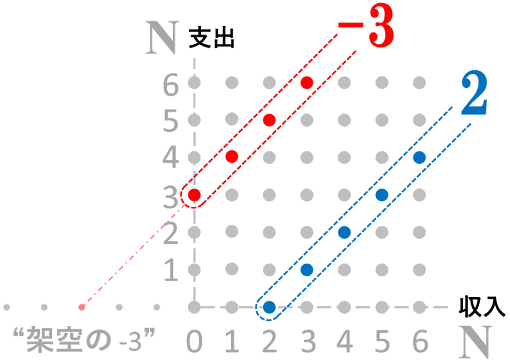
と定義しちゃう

一見「引き算」を使っていてチートっぽいが、
実は足し算だけでうまく定義できる *1*2

*1 詳細割愛。キーワード：同値関係による集合の割り算。"条件の同値 $\Longleftrightarrow$" とは異なる概念。

*2 ★ 直積 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ を同値関係 $(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$ で割ることによって $\mathbf{Z}$ が作れる。
この方法はグロタンディーク群の構成の具体例にあたる。

[Z3] “数学的な Z” の製作 (3)



$$-3 = \{(0,3),(1,4),\ldots\} \qquad 2 = \{(2,0),(3,1),\ldots\}$$ [*1]

*1 ★ 左辺の **2** は「整数としての **2**」、右辺に現れる **2** は「自然数としての **2**」で、集合としては異なる。int 型と nat 型の 2 がある感じ。本当なら $\mathbf{2_Z}, \mathbf{2_N}$ とでも書いて区別すべきだが、煩わしいのでそこまではしないでおく。「型変換」関数を (集合として) 定義できるから気にしないで良い。

[Z3] “数学的な $\mathbb{Z}$” の製作 (4)

- 自然数の $+, \times, \leqq$ を活用して
- 整数の加減乗と大小も作れる
  - ★ $[(k,l)] \leqq_{\mathbf{Z}} [(m,n)] \iff (k +_{\mathbf{N}} n) \leqq_{\mathbf{N}} (l +_{\mathbf{N}} m)$ など
  - ★ こういう時は well-definedness を示さないといかん
- 性質は $\mathbf{N}$ 上のから遺伝

[Z4] 条件チェック

仕様を満たしているかテスト

完成した集合たち

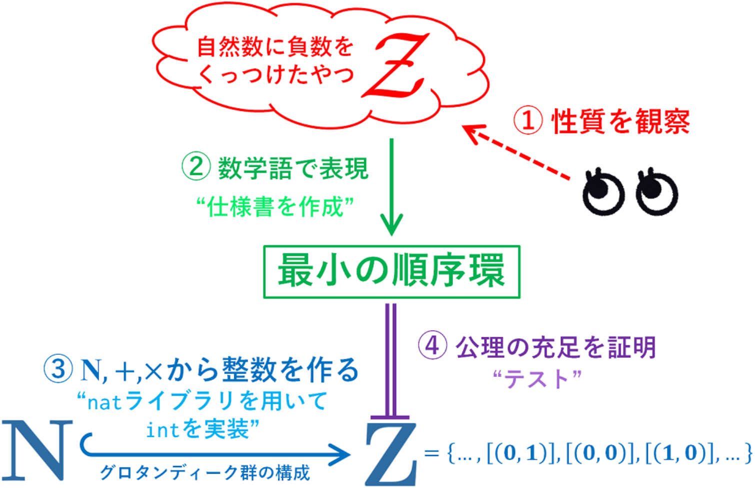
$$\mathbf{Z}, +, -, \times, \leq$$

は整数の公理を満たす唯一のもの [*1]

(であることが証明できる。結構面倒。)

[*1] ★ up to iso.

整数まとめ



自然数に負数を
くっつけたやつ
Z
① 性質を観察
② 数学語で表現
“仕様書を作成”
最小の順序環
④ 公理の充足を証明
“テスト”
③ N, +,×から整数を作る
“natライブラリを用いて
intを実装”
N
グロタンディーク群の構成
Z
$= \{\dots, [(0,1)], [(0,0)], [(1,0)], \dots\}$

有理数は割愛 (整数に類似)

Q1-Q2　有理数のイメージを数学語化 $\rightsquigarrow$ 最小の順序体

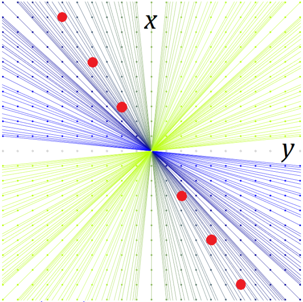
- 順序体 ＝ 四則演算 ＋ 演算と矛盾しない大小

Q3　整数と加減乗・大小を用いて、分数を無理やり表す

- 有理数 ＝ 分子と分母の対 ＝ 傾き
- $-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} = \{(\mp\mathbf{2}, \pm\mathbf{3}), (\mp\mathbf{4}, \pm\mathbf{6}), (\mp\mathbf{6}, \pm\mathbf{9}), \ldots\}$ (複号同順)
- 厳密に：$\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{\mathbf{0}\})$ を同値関係 $(p, q) \sim (r, s) \Leftrightarrow ps - qr = \mathbf{0}$ で割ったものが $\mathbf{Q}$

Q4　完成した $\mathbf{Q}, +, -, \times, \div, \leqq$ は公理を満たす唯一のもの (up to iso.)

一連の構成を、$\mathbf{Z}$ の商体の構成という



出典：https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rational_Representation.svg (を改変)

[R1] “素朴な$\mathcal{R}$” の観察(1)

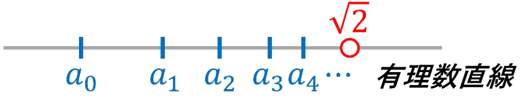
実数のイメージを洗い出す

有理数のダメなところ：スカスカ

数列 $a_0 = 1,\ a_{n+1} = \frac{3a_n+4}{2a_n+3}$ を考える

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1 && = 1 \\
a_1 &= 7/5 && = 1.4 \\
a_2 &= 41/29 && = 1.413793\cdots \\
a_3 &= 239/169 && = 1.41420118\cdots \\
a_4 &= 1393/985 && = 1.4142131979\cdots
\end{aligned}
$$

各項は有理数 だが 極限は有理数からハミ出る



[R1] “素朴な$\mathcal{R}$” の観察 (2)

実数 = みっちり数直線　　Q. みっちりとは？

A. 発散・振動しない数列の極限が…

- スカスカ有理数 = 有理数からハミ出るかも

だったので

- みっちり実数 = 実数から絶対ハミ出ない

と考えればよさそう

[R2] 実数の公理化

イメージを基に数学語で仕様書を書く

★ 実数の公理

実数全体とは、完備順序体のことである。

[用語のイメージ]

順序体　四則演算と、演算に矛盾しない大小関係

完備　みっちり (= 極限が自身の中に存在)

★ 実数の完備性 (連続性) の公理 ←大事

上に有界な単調増加実数列は、実数に収束する。

(ちなみに：同値な言い換えが沢山ある)

[R3] “数学的な$\mathbf{R}$” の製作 (1)

手持ちアイテムを駆使して整数を実装

アイテム：有理数と加減乗除・大小・集合操作

考え方　付け足したい数は無理やり付け足す

有理数の隙間を埋める必要がある。どうやって？

無いなら足す。

足りないのは有理数列の “極限” たちなので、
そいつら自身を付け加えればよい

[R3] "数学的な $\mathbf{R}$" の製作 (2)

極限とは？ "極限 = 数列自体" だと思ってしまう

$$
\begin{aligned}
\pi &= [(\mathbf{3},\ \mathbf{3.1},\ \mathbf{3.14},\ \mathbf{3.141},\ldots)] \\
&= [(\mathbf{4},\ \mathbf{3.2},\ \mathbf{3.15},\ \mathbf{3.142},\ldots)] \\
&= (\text{等々})
\end{aligned}
$$

ポイント：有理数人にとって

- 「有理数列の収束先」は何者かわからないが
- 「有理数列が収束するか否か」は判定可能！

★[R3] “数学的な $\mathbf{R}$” の製作 (3)

厳密に言えば…

$\{a_n\} \in {}^{\mathbf{N}}\mathbf{Q}$ が (有理数の) コーシー列　コーシー列は大学一年で習う重要概念

$\iff \forall k \in \mathbf{N}\, \exists N \in \mathbf{N}\, \forall m, n > N\ |a_m - a_n| < \mathbf{2}^{-k}$

$\{a_n\}, \{b_n\} \in {}^{\mathbf{N}}\mathbf{Q}$ について、

$\{a_n\} \sim \{b_n\} \iff \forall k \in \mathbf{N}\, \exists N \in \mathbf{N}\, \forall n > N\ |a_n - b_n| < \mathbf{2}^{-k}$

として

$\mathbf{R} =$ (有理コーシー列全体) $/\sim$ と定める。 (以上、有理数しか使っていない！)

近さの概念 $|x|$ を p 進距離 $|x|_p$ で置き換えると、数論等で重要な p 進数が出来上がる (注：“二進法” 等とは別物)

$$(\cdots 111)_2 = -1$$

「右に」ではなく「左に」無限桁続く数の世界 (誰か教えて)

[R4] 条件チェック

仕様を満たしているかテスト

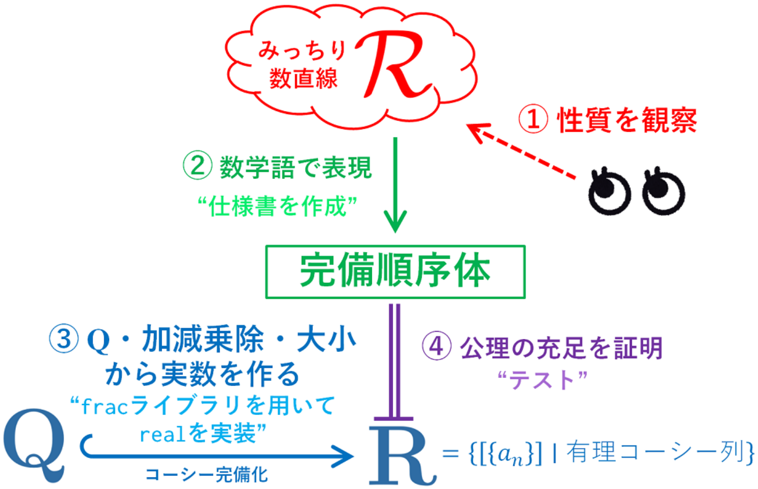
完成した集合たち

$$\mathbf{R}, +, -, \times, \div, \leqq$$

は実数の公理を満たす唯一のもの[*1]
(であることが証明できる。難しい。)

[*1] ★ up to iso.

実数まとめ


みっちり
数直線
$\mathcal{R}$
① 性質を観察
② 数学語で表現
“仕様書を作成”
完備順序体
③ Q・加減乗除・大小
から実数を作る
“fracライブラリを用いて
realを実装”
$\mathbb{Q}$
コーシー完備化
$\mathbb{R}$
$= \{[\{a_n\}] \mid$ 有理コーシー列$\}$
④ 公理の充足を証明
“テスト”

[R5] 余談(1)

以上のもと、

- 任意の実数は十進展開可能
- $\mathbf{e} = \lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{n}\right)^n$ は実数

であることが証明できる！

[R5] 余談(2)

入試か何かでありそうな問題 (演習)

【問】 数列 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ について以下を示せ。

(1) $a_n \leqq 3$　　(2) $a_n \leqq a_{n+1}$

この裏には隠れた問 (3) が存在する

(3) 数列 a_n は実数に収束することを示せ。

$\boxed{\text{解答}}$ 実数列 a_n は、(1) より上に有界、(2) より単調増加なので、実数の完備性 (連続性) より実数に収束する。[証明終]

複素数は割愛

C1-C2　複素数のイメージを数学語化 $\rightsquigarrow$ 実数体を含む最小の代数的閉体 [*1]

- 代数的閉体 = 四則演算 + どんな代数方程式も解を持つ

C3　実数と加減乗除・大小を用いて、複素数を表す

- 複素数 = 実部と虚部の対 $(\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R})$　　$\mathbf{2} + \mathbf{3}i = (\mathbf{2}, \mathbf{3})$
- それよりも演算が大事。しかし大小は犠牲になる。
  - $(a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d)$
  - $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
  - $(a, b) \div (c, d) = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$ “分母の実数化”

C4　完成した $\mathbf{C}, +, -, \times, \div$ は公理を満たす唯一のもの (up to iso.)

構成自体は単純で、$\mathbf{R}$ の拡大体 $\mathbf{R}(\sqrt{-1})$ の構成にあたる。これが公理を満たす唯一のものであることは「代数学の基本定理」「代数閉包の一意性」と呼ばれる大定理で、証明は難しい。

[*1] ★「複素数とは実数に $\sqrt{-1}$ をくっつけたもの」が常識的な捉え方なのでこの動機付けはちょっと強引かも…。実数の基礎付けは「完備順序体の公理を先に立てて、それを満たすように $\mathbf{R}$ を構成する」(公理が先・構造は後) という理論展開が標準的だと思うが、複素数の場合は逆に「$\mathbf{C}$ を $\mathbf{R}(\sqrt{-1})$ として定義し、それが代数的閉体であることを示す」(構造が先・公理 [というより定理] が後) という議論が標準的だろう。ここで採った「複素数体とは実数体を含む最小の代数的閉体のこと」して複素数体を特徴付けようとする「定義」の仕方は基礎論的なものの見方に近いだろう (尤も、このように「$\mathbf{C}$ とは $\mathbf{R}$ の代数閉包である」と定義するのは暗に構成まで言及しているので、基礎論的であると同時に代数的なものの見方でもある)。「公理が先・構造が後」というこの発表の大枠に合わせるためこのようにした。出発点をどこにするかによって “公理や定義” と “定理” が “ひっくり返る” のは数学のどこにでも現れる現象なのだが。

★ 別の実装

仕様を満たせば実装は何でもいい

例：整数＝「符号ビットと絶対値の組」とすれば各整数が有限集合として軽量に実装できて嬉しい。但し演算で場合分けが生じて面倒。

この発表で採ったのは「標準的」「応用が利く」ものばかりだが、各整数が無限集合になるなど「重量級の実装」になっている。

★ 第4部 ♣ 非公開

★ 第5部　余談

その1
性質と実体 — 圏論と集合論

あなたは何者？

あなたの実体

質量 60 kg・うち酸素 63 %・血液型 A・…

あなたの性質

旭 73 期・物理が好き・あいつが嫌い・…

どっちも大事。使い分けが重要。

実体重視・性質重視

既述の集合論…何でできているかに注目

$$\mathbb{N} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots\}$$

圏論という分野…周囲との関わり方に注目

- 矢印のネットワークを使い
- 世界の中でどういう立ち位置にいるかを記述
- 「何でできているか」は不問

自然数の圏論的定義

自然数の圏論的定義

終対象 1 を持つ圏における図式 $1 \xrightarrow{z} N \xrightarrow{s} N$ が NNO (Natural Numbers Object) であるとは、任意の図式 $1 \xrightarrow{c} X \xrightarrow{f} X$ に対し、$u \circ z = c$ かつ $u \circ s = f \circ u$ を満たす射 $u \colon N \to X$ が唯一つ存在することをいう。
自然数の構造とは、圏 **Sets** における NNO のことをいう。

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "z"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dotted, "u"] & N \arrow[d, dotted, "u"] \\
1 \arrow[r, "c"'] & X \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}
$$

要するに漸化式！

さっきの謎の図を解読してみる。

要するに漸化式！

さっきの謎の図を解読してみる。

$$\{*\} \xrightarrow[a_0 = -1]{} \mathbb{Z}$$

- 数列の第 0 項と

要するに漸化式！

さっきの謎の図を解読してみる。

$$\{*\} \xrightarrow[a_0 = -1]{} \mathbb{Z} \xrightarrow[a_{n+1} = 3a_n + 4]{} \mathbb{Z}$$

- 数列の第 0 項と
- 漸化式が与えられると

要するに漸化式！

さっきの謎の図を解読してみる。

$$\{*\} \xrightarrow[a_0 = -1]{} \mathbb{Z} \xrightarrow[a_{n+1} = 3a_n + 4]{} \mathbb{Z}$$

$$a_n = 3^n - 2$$

- 数列の第 0 項と
- 漸化式が与えられると
- 一般項が必ず唯一つに求まる。

要するに漸化式！

さっきの謎の図を解読してみる。

$$
\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "\text{first number}"] \arrow[d, equal] & \mathbb{N} \arrow[r, "\text{next number}"] \arrow[d, dotted] & \mathbb{N} \arrow[d, dotted, "a_n = 3^n - 2"] \\
\{*\} \arrow[r, "a_0 = -1"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "a_{n+1} = 3a_n + 4"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}
$$

- 数列の第 0 項と
- 漸化式が与えられると
- 一般項が必ず唯一つに求まる。
- この原理を保証してくれるのが自然数の本質

というのが圏論的思考。

圏論

- 20 世紀に誕生した若い分野
- 現代数学では必須
- フェルマーの最終定理の証明にも登場
- 物理学・コンピュータ科学などにも応用

- 大学では教えてくれない
- なのに大学院では常識という風潮？
- 灘中高の数研では勉強会やってる [*1]

[*1] Twitter には大学院以上の数学やってる中高生が多くてビビる

その2
実数の個数 — 分岐する数学

集合論の誕生日 1873 年 12 月 7 日

G. カントルにより次の事実が発見された[1]：

無限には無限個の種類がある

現代的に：

集合のサイズは以下のどれか一つになる：

$$\overbrace{0, 1, 2, \ldots\ldots}^{\text{有限}} \quad \overbrace{\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots, \aleph_{\omega+\omega}, \ldots, \aleph_{\omega^2}, \ldots}^{\text{無限}}$$

$\emptyset$　$\{5, 7\}$

可算順序数全体

$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$, 代数的数全体

[1] カントルの発見は $|\mathbf{N}| < |\mathbf{R}|$ というものだが、ここから「無限には…」が帰結する

連続体仮説

実数の個数も必ず $\aleph_\bullet$ の形で書ける [*1]。
カントルはそれを $\aleph_1$ だと予想した
(これを連続体仮説, **CH** という)。 しかし…

連続体仮説の独立性 [ゲーデル (1938)、コーエン (1963)]

ZFC では **CH** は証明も反証もできない [*2]。

つまり、「全数学」が展開できる ZFC でも
実数の個数わけわからん。

[*1] ことが ZFC で証明できる
[*2] ★ ZFC の無矛盾性を仮定すれば、の話

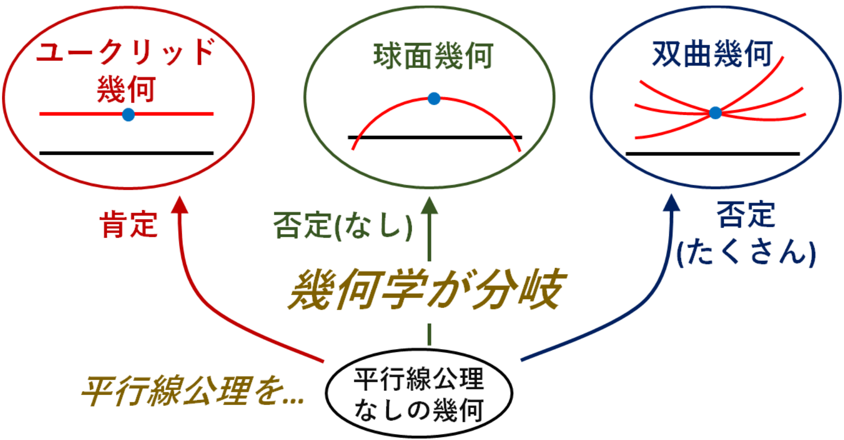
モデルと独立性

ゲーデルとコーエンの証明：
実数の個数が $\aleph_1, \aleph_2$ のモデルを具体的に構築 [*1]

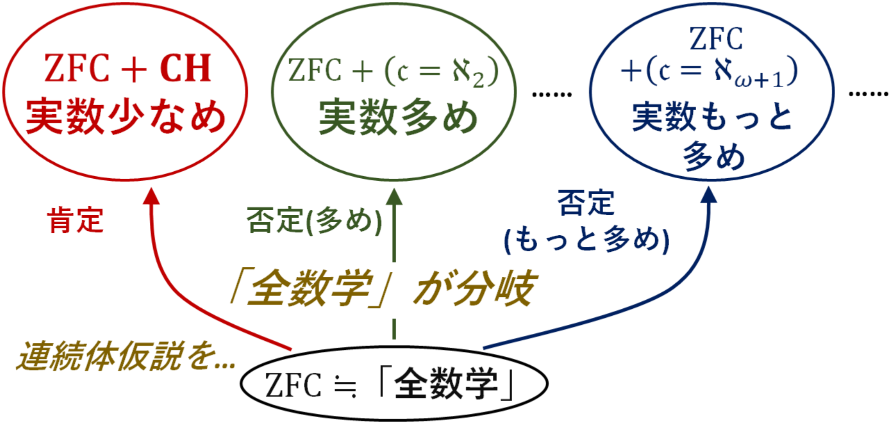
これは幾何学の「平行線公理」の証明や反証の不可能性をめぐる状況に類似

[*1] ★ ここから健全性定理によって CH の独立性が帰結する。ゲーデルは CH が成り立つ構成可能集合の宇宙 L を創り、コーエンはコーエン強制によって CH が成り立たない宇宙を創った。なお、実数の個数 $\mathfrak{c}$ は "$\mathfrak{c} > \aleph_0$ かつ $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) > \omega$" を満たす限り好きなようにいじれる。

幾何学の分岐


ユークリッド
幾何
球面幾何
双曲幾何
肯定
否定(なし)
否定
(たくさん)
幾何学が分岐
平行線公理を...
平行線公理
なしの幾何

「全数学」の分岐



このように集合論のモデル (宇宙) を生み出す、
強制法という系統的で強力な方法がある

その3 ♣ 非公開

参考文献等

一度専門書を見てみる

- 啓蒙書もいいけど…
  - ブルーバックス・数学ガール・etc.
- 背伸びして専門書・教科書を見てみる
  - とにかく大型書店に行く
  - オススメはネットとかで。洋書は Amazon
- その後は自由
  - どっちが良い悪いの問題ではない
  - 挑戦するもアリ (同志の中高生は Twitter にいる)
  - 大学まで待つもアリ
  - 啓蒙書と専門書の架け橋となる入門書は貴重
  - 私の話：大学以降の数学のスタイルや、そもそも分野名すら知らなかったことを大いに後悔

啓蒙書

- 結城浩, 数学ガール/ゲーデルの不完全性定理, SB クリエイティブ, 2009.

ゲーデルの原論文に準拠した終盤は必見。ただしこれ一冊で数理論理学のバランス感覚をつかむのは不可能かと。整数の構成の説明はこれがわかりやすい。

入門書

- 田中一之・鈴木登志雄, 数学のロジックと集合論, 培風館, 2003.

推し。マジで良い。公理的集合論方面の見取り図を与え、本格的な教科書の副読本としても使える。ただし入手困難←数学書あるある

数理論理学全般がバランスよく書かれている本もたくさんある (私はつまみ食いで少しずつ覚えたので案内できません…すみません)

専門書

公理的集合論に限れば以下が定番。上と下は和訳あり。

- Kunen, K., *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, Vol. 102. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1980.
- —, *Set Theory* (rev. ed.), Vol. 34. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.
- —, *The Foundations of Mathematics*, Vol. 19. Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2009.

論理学の他分野 (証明論・モデル理論・計算論・⋯) の専門書は割愛。いずれにせよ洋書が多い。

ネットをうまく使う

- 入門PDF・書物・論文などがタダで手に入る
- 様々な世代の同志が見つかる
  - バケモノもいるけどあまり落ち込まない

Any Questions?

スライドの場所：https://elecello.com/works