# POMB数理論理学班 平成28年度中間報告

学生団体POMB数理論理学班

Kobe University

Sept. 30, 2016

- 導入
  - 数理論理学班の概要
  - 数理論理学が扱う対象
1. 命題論理
   - 命題論理の意味論と構文論
   - 完全性定理
2. 述語論理
   - 述語論理の概要
   - 完全性定理
3. エルブランの定理と導出原理
   - 決定可能性
   - 第 3 章のアウトライン

# メンバとテキスト

- メンバ：
  Y 氏，K 氏，O 氏
- テキスト：
  『情報科学における論理（情報数学セミナー）』，
  小野寛晰，日本評論社，1994.

# テキストの構成 (前半)

1. 命題論理
   - 古典命題論理の構文論と意味論・論理積標準形と論理和標準形・完全性定理・cut 除去定理・ブール代数・etc.
2. 述語論理
   - 古典一階述語論理の構文論と意味論・冠頭標準形・完全性定理・コンパクト性定理・一階述語論理の拡張・超準モデル・etc.
3. エルブランの定理と導出原理
   - スコーレム標準形・エルブランの定理・導出原理

前期は 3 章の途中まで読んだ.

# テキストの構成 (後半)

4. 様相論理
   - クリプキ意味論・完全性定理・有限モデル性と決定可能性・様々な様相論理・etc.
5. 直観主義論理
   - クリプキ意味論・完全性定理・有限モデル性・ハイティング代数・etc.
6. 自然演繹の体系
   - 証明図の正規化・$\lambda$ 計算・カリーハワード対応・etc.

出来れば最後まで読みたい.

# 今日の中間報告では

- 前期で読んだ主要部を紹介．時間の都合上，定義等は感覚的で不正確．
- 用語や記法はできるだけテキストに従う．
- 今日は古典論理しか扱わないので「古典」はイチイチ言わない．

# 数理論理学って何

## 「論理」を「数学的に」研究する学問.

「論理の数学的研究」と一口に言っても広すぎる. あまりにも雑で怒られてしまうかもしれないが, 次の 3 つの軸で分類してみよう.

- 何を？
- どこまで？
- どうやって？

# 何を？

古典論理 vs 非古典論理

# どこまで？

命題論理 vs 述語論理

# どうやって？

構文論 vs 意味論

# とても雑な地図

| | | 構文論 | 意味論 |
|---|---|---|---|
| 古典論理 | 命題論理 | | |
| | 述語論理 | | |
| 非古典論理 | 命題論理 | | |
| | 述語論理 | | |

# 命題論理の論理式

**Definition 1**

命題変数と呼ばれる文字 $p, q, r, \ldots$ と命題定数と呼ばれる文字 $\bot, \top$ から始めて，論理結合子 $\wedge, \vee, \supset, \neg$ と括弧を使って「適切に」組み上げられる文字列を論理式といい，$A, B, C, \ldots$ 等で表す．

$\supset$ は「ならば」を意図した記号で，Consequence の ‘C’ に由来するらしい．部分集合の記号と似ているが全く無関係．

**Example**

“$(p \vee q) \supset p$” は論理式だが “$\neg(\vee p)q\wedge$” は論理式でない．

# 命題論理の意味論

命題論理の一般的な意味論は，要するに真理値表の計算．$\top$ には常に t を，$\bot$ には常に f を割り当てる．

**Example**

$(p \vee q) \supset p$ の真理値表．

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $(p \vee q) \supset p$ |
|---|---|---|---|
| f | f | f | t |
| f | t | t | f |
| t | f | t | t |
| t | t | t | t |

# トートロジー

縦に t がズラリと並ぶ論理式を**トートロジー**という．

**Example**

$p \supset (q \supset p)$ はトートロジー．

| $p$ | $q$ | $q \supset p$ | $p \supset (q \supset p)$ |
|---|---|---|---|
| f | f | t | t |
| f | t | f | t |
| t | f | t | t |
| t | t | t | t |

# とても雑なまとめ

| | | 構文論 | 意味論 |
|---|---|---|---|
| 古典論理 | 命題論理 | | 真理値の計算 |
| | 述語論理 | | |
| 非古典論理 | 命題論理 | | |
| | 述語論理 | | |

# 命題論理の構文論 1

構文論にはいろいろな流儀がある (ヒルベルト流，自然演繹，etc.)．このテキストは主にシーケント計算の体系 LK を採用している．

**Definition 2**

$\Gamma \to \Delta$ なる文字列をシーケントという．ただし $\Gamma$ および $\Delta$ は論理式の列とする (空列でもよい)．

**Example**

"$p \supset (q \to r), p \wedge q, \neg r \to q \vee r$" や "$\to$" はシーケントである．

# 命題論理の構文論 2

公理 (に相当する始式の概念)，および推論規則を定める．

**Definition 3**

“$A \to A$”，“$\to \top$”，“$\bot \to$” の形のシーケントを始式という．但し $A$ は任意の論理式．

**Definition 4**

次に掲げる 17 個の図式を LK の推論規則という．但し，$A, B$ は任意の論理式，$\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma$ は任意の論理式の列で，空列でもよい．

# 命題論理の構文論 3

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{A, \Gamma \to \Delta}\ \text{W 左} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, A}\ \text{W 右}$$

$$\frac{A, A, \Gamma \to \Delta}{A, \Gamma \to \Delta}\ \text{C 左} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A, A}{\Gamma \to \Delta, A}\ \text{C 右}$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Pi \to \Delta}{\Gamma, B, A, \Pi \to \Delta}\ \text{E 左} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A, B, \Sigma}{\Gamma \to \Delta, B, A, \Sigma}\ \text{E 右}$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \qquad A, \Pi \to \Sigma}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Sigma}\ \text{cut}$$

# 命題論理の構文論 4

$$\frac{A, \Gamma \to \Delta}{A \wedge B, \Gamma \to \Delta} \wedge \text{左 1} \qquad \frac{B, \Gamma \to \Delta}{A \wedge B, \Gamma \to \Delta} \wedge \text{左 2}$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \qquad \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \wedge B} \wedge \text{右} \qquad \frac{A, \Gamma \to \Delta \qquad B, \Gamma \to \Delta}{A \vee B, \Gamma \to \Delta} \vee \text{左}$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A}{\Gamma \to \Delta, A \vee B} \vee \text{右 1} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \vee B} \vee \text{右 2}$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \qquad B, \Pi \to \Sigma}{A \supset B, \Gamma, \Pi \to \Delta, \Sigma} \supset \text{左} \qquad \frac{A, \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \supset B} \supset \text{右}$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A}{\neg A, \Gamma \to \Delta} \neg \text{左} \qquad \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg A} \neg \text{右}$$

# 命題論理の構文論 5

始式から始めて，推論規則を「適切に」使って組み立てられる図を (LK の) 証明図という．シーケント $\Gamma \to \Delta$ に至る証明図が存在することを，$\Gamma \to \Delta$ は証明可能であるという．

**Example**

シーケント "$\to ((p \supset q) \supset p) \supset p$" は証明可能．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to p}{p \to p, q}\text{ w 右}}{\to p, p \supset q}\text{ ⊃ 右} \qquad p \to p}{(p \supset q) \supset p \to p, p}\text{ ⊃ 左}}{\dfrac{(p \supset q) \supset p \to p}{\to ((p \supset q) \supset p) \supset p}\text{ ⊃ 右}}\text{ c 右}
$$

# とても雑なまとめ

| | | 構文論 | 意味論 |
|---|---|---|---|
| 古典論理 | 命題論理 | LK の証明図 | 真理値の計算 |
| | 述語論理 | | |
| 非古典論理 | 命題論理 | | |
| | 述語論理 | | |

# 完全性定理

**Theorem 5 (LK の完全性定理)**

$\Gamma \to \Delta$ をシーケントとするとき，

$$\bigwedge \Gamma \supset \bigvee \Delta \text{ がトートロジー} \iff \Gamma \to \Delta \text{ が LK で証明可能.}$$

“(⇒): 正しいことは証明できる” を完全性，
“(⇐): 証明できることは正しい” を健全性という．

**Sketch of Proof**

(⇐): 証明の複雑さに関する帰納法．
(⇒): トートロジーシーケント $S$ の「完全分解木」を考えると，葉はすべて LK で (cut なしで) 証明可能なシーケントであることが証明できる．また，完全分解木において子が LK で (cut なしで) 証明可能なシーケントであるならば，親もそうであることが証明できる．この事実を繰り返し用いて $S$ は LK で (cut なしで) 証明可能なシーケントであることが証明できる． □

# cut 除去定理

**Corollary 6 (cut 除去定理)**

$\bigwedge \Gamma \supset \bigvee \Delta$ がトートロジーならば，$\Gamma \to \Delta$ が LK で cut なしで証明可能である．

cut なし証明図は色々と良い性質を持つ．

**Example (subformula property)**

【cut 以外の推論規則】

$$\dfrac{A, \Gamma \to \Delta}{A \land B, \Gamma \to \Delta}\ \land 左 1$$

前提の論理式が結論に現れる．

【cut】

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta, A \qquad A, \Pi \to \Sigma}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Sigma}\ \mathrm{cut}$$

前提の論理式が結論で消えてしまう．

# とても雑なまとめ

| | | 構文論 | 意味論 |
|---|---|---|---|
| 古典論理 | 命題論理 | LK の証明図 | 真理値の計算 |
| | 述語論理 | | |
| 非古典論理 | 命題論理 | | |
| | 述語論理 | | |

# 述語論理

- 古典一階述語論理は数学を形式的に展開するための強力な体系.
- 装置が大掛かりなので命題論理より扱いが難しい(言語の策定，量化子 $\forall, \exists$ や変数の扱い，$\cdots$).
- 普段の進捗報告で割と話しているので，今日は大部分を割愛.

# 述語論理の意味論

意味論は構造を用いて与えられる．

**Definition 7**

$\mathcal{L}$ を言語とする．$\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ が言語 $\mathcal{L}$ に対する構造であるとは，

- $U \neq \varnothing$;
- $I$ は $\mathcal{L}$ からの写像であり，$s \in \mathcal{L}$ に対し $I(s)$ を $s^I$ と書く．ただし，
  - $c^I \in U$ ($c$ は $\mathcal{L}$ の定数記号);
  - $f^I : U^n \to U$ ($f$ は $\mathcal{L}$ の $n$ 項関数記号);
  - $P^I \subseteq U^n$ ($P$ は $\mathcal{L}$ の $n$ 項関係記号).

要するに構造とは，群や順序環のような定数・演算・関係の備わった集合のこと．
構造 $\mathfrak{A}$ 上で論理式 $A$ が真であることを $\mathfrak{A} \models A$ と書く．論理式 $A$ が恒真とは，任意の構造 $\mathfrak{A}$ について $\mathfrak{A} \models A$ であること．

# 述語論理の構文論

述語論理版の LK は，命題論理版の LK に以下の推論規則を追加するだけ．

$$\frac{A[t/x]\Gamma \to \Delta}{\forall x A, \Gamma \to \Delta}\ \forall\text{左} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A[z/x]}{\Gamma \to \Delta, \forall x A}\ \forall\text{右}\ ^{*}$$

$$\frac{A[z/x], \Gamma \to \Delta}{\exists x A, \Gamma \to \Delta}\ \exists\text{左}\ ^{*} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A[t/x]}{\Gamma \to \Delta, \exists x A}\ \exists\text{右}$$

(∗) 固有変数条件が付随

# 完全性定理

命題論理と同様に，完全性定理が成り立つ．

**Theorem 8 (LK の完全性定理)**

$\Gamma \to \Delta$ をシーケントとするとき，

$$\bigwedge \Gamma \supset \bigvee \Delta \text{ が恒真} \iff \Gamma \to \Delta \text{ が LK で証明可能.}$$

我々のゼミでは，完全性定理の最も一般的な形をヘンキンの方法で証明した．

**Theorem 9 (完全性定理)**

$\mathcal{L}$ を言語，$T$ を $\mathcal{L}$ の理論，$A$ を $\mathcal{L}$ 文とするとき，

$$T \models A \iff T \vdash A.$$

# コンパクト性定理

完全性定理から，次のコンパクト性定理が帰結する．

**Theorem 10 (コンパクト性定理)**

$T$ を理論とする．$T$ がモデルを持つための必要十分条件は，$T$ の任意の有限部分集合がモデルを持つことである．

数理論理学において縦横に用いられる重要な定理である．

# とても雑なまとめ

| | | 構文論 | 意味論 |
|---|---|---|---|
| 古典論理 | 命題論理 | LK の証明図 | 真理値の計算 |
| | 述語論理 | LK の証明図 | 構造上の真偽 |
| 非古典論理 | 命題論理 | | |
| | 述語論理 | | |

# 命題論理の決定可能性

命題論理は述語論理の一部に過ぎないが，述語論理にはないかなり良い性質を持つ．

**Theorem 11 (命題論理の決定可能性)**

与えられた命題論理式 $A$ がトートロジーか否かは有限的に判定することができる．

**Proof**

$A$ の真理値表を書けばよい． $\square$

さらに言うと，トートロジーの証明図を有限的に構成する手続きも存在する．

# 述語論理の決定不能性

述語論理はこのような性質を持たない.

**Theorem 12 (述語論理の決定不能性 (チャーチ, 1936))**

与えられた述語論理式 $A$ が恒真か否かは有限的に判定できない.

**Proof**

ゲーデルの不完全性定理による. □

ただし,「恒真なら必ず '恒真' と返して停止するが, そうでない場合には永遠に走り続けるプログラム」は存在する. これをどんな場合にも停止するように改良することは不可能, ということ.

# 第3章のモチベーション

「恒真なら必ず '恒真' と返して停止するが，そうでない場合には永遠に走り続けるプログラム」は，(言語が有限なら) 証明図を列挙するプログラムを利用して作れる．しかしあまりにも非効率．もうちょいマシにできないの？

# 第3章前半のアウトライン1

**Theorem 13**

$A$ を述語論理式とする．$A'$ を $A$ の全称閉包，$A''$ を $A'$ の冠頭標準形，$A'''$ を $A''$ から有限的に「適切に」作られる存在冠頭論理式とするとき，

$$A\text{ が恒真} \iff A'\text{ が恒真} \iff A''\text{ が恒真} \iff A'''\text{ が恒真}.$$

存在冠頭論理式 $A'''$ を，$A$ のスコーレム標準形という．

# 第3章前半のアウトライン2

この定理より,「$A$ の恒真性を判定する」という問題は「$A$ のスコーレム標準形の恒真性を判定する」という同値な問題に帰着できる．下線部に帰着しても，恒真でない場合に永遠に走り続ける状況を排除出来ないことには変わりないが，下線部の問題はエルブランの定理を使ってある種の命題論理式のトートロジー判定問題に帰着し，比較的マシに解ける．

# その他の話題

他にもブール束や算術の超準モデル等の話題を扱った．後期も頑張るぞい．

# 参考文献

小野寛晰, 情報科学における論理 (情報数学セミナー), 日本評論社, 1994.