

数理論理学班，超準解析班，群論班の““邂逅”””

近藤 友祐 (神戸大学数学研究会 POMB 数理論理学班)

2016 年 7 月 13 日

工学部生のくせに物理の知識が皆無なので解析力学班は邂逅させられませんでした…ごめんなさい。ただし，そのうち超準班のプロたちが超準解析と物理学の関係を明らかにして発表してくれるでしょう。楽しみですね !!!!!!!!!!!!!!!

我々はこの 2 週間で「完全性定理」「コンパクト性定理」「算術の超準モデル」などを扱いました。完全性定理は古典 1 階述語論理の最重要定理であり，普通，コンパクト性定理は完全性定理の系として証明されます。コンパクト性定理はモデル理論における最も基本的で強力な定理であり，多くの応用を持ちます。例えば，算術や実数論の超準モデルの存在を根拠づけたり，四色定理を国の数が無限の場合に拡張出来たりします。今日は，超準班の ${}^*\mathbb{R}$ の構成にも用いた「超積」によるコンパクト性定理の別証を，ふんわりと紹介します。まずはゴールとなるコンパクト性定理のステートメントの確認です。

定理 1 (コンパクト性定理) 公理系 T がモデルを持つための必要十分条件は， T の任意の有限部分集合がモデルを持つことである。

公理系とかモデルとかいう言葉についてざっと見ておきましょう。正確な定義は紹介しません。

定義 2 ● 文 (自由変数を持たない論理式) の集合を公理系という。公理系は無限集合でもよい。

- 構造 \mathfrak{M} の上で文 φ が成り立つことを $\mathfrak{M} \models \varphi$ と書く。
- 構造 \mathfrak{M} が公理系 T のモデルである (記号: $\mathfrak{M} \models T$) とは， \mathfrak{M} の上で T のすべての公理が成り立つこと。つまり $\forall \varphi \in T (\mathfrak{M} \models \varphi)$ であること。

例えば，構造 \mathfrak{Z} を整数全体の集合 \mathbb{Z} に通常の加法 $+$ と零元 0 が入った構造 $\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}; +, 0 \rangle$ とし，(言語 $\{ \cdot, e \}$ における) 公理系 Γ を群の公理系 $\Gamma = \{ \forall x \forall y \forall z ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)), \forall x (x \cdot e = e \cdot x = x), \forall x \exists y (x \cdot y = y \cdot x = e) \}$ とします。このとき $\mathfrak{Z} \models \Gamma$ です。標語的に「群=群の公理系のモデル」と言っておきます。

定理 1 を示すために，超準班がやった「Łoś(ウオツシュ)の定理」を使います。

定理 3 (Łoś の定理—超準班版) \mathcal{U} を \mathbb{N} 上のウルトラフィルター， $\varphi(x^1, x^2, \dots, x^n)$ をある条件を満たす論理式とする (x^j の j はただの添字であって，「 x の j 乗」ではない)。色々と細かい条件は置いておいて，

$$\mathcal{U}({}^*\mathbb{R}) \models \varphi(a^1, a^2, \dots, a^n) \iff \{i \in \mathbb{N} : \mathcal{U}(\mathbb{R}) \models \varphi(a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^n)\} \in \mathcal{U}.$$

我々は，これにそっくりな Łoś の定理の一般形を用います。

定理 4 (Łoś の定理—一般形) $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ を \mathcal{L} 構造の族， \mathcal{U} を集合 I 上のウルトラフィルター， $\varphi(x^1, x^2, \dots, x^n)$ を \mathcal{L} 論理式とする。このとき， $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ たちの超積 $\mathfrak{A}^* = \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U}$ の任意の元 $[a^1], [a^2], \dots, [a^n] \in \mathfrak{A}^*$ に対して

$$\mathfrak{A}^* \models \varphi([a^1], [a^2], \dots, [a^n]) \iff \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi(a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^n)\} \in \mathcal{U}$$

である。特に， φ が文のときは

$$\mathfrak{A}^* \models \varphi \iff \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{U}. \quad (1)$$

超積 \mathfrak{A}^* は、 \mathfrak{A}_i たちの直積をウルトラフィルターが定める同値関係で割ったのちに自然な構造を入れたものです。 \mathfrak{A}^* は \mathfrak{A}_i たちの性質を遺伝します。例えば、 $\{\mathfrak{G}_i\}_{i \in I}, \{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ が群、体の族なら超積 $\mathfrak{G}^*, \mathfrak{R}^*$ も群、体になります。(一方で直積をとるだけでは性質が遺伝するとは限りません。例えば群の族の直積は自然に群になりますが、体の族の直積はそうなりません。why?) コンパクト性定理の証明では、 T の有限部分集合のモデルたちの超積が T 全体のモデルであることを示します。そのためにLośの定理が用いられます。

次の補題はZornの補題を用いて証明されます。ちなみに、我々が先々週に扱った「無矛盾な公理系は極大無矛盾な公理系に拡大できる」という補題の証明に酷似しています。

補題 5 I を集合とする。 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(I)$ が有限交叉性を持つならば、 \mathcal{E} を部分集合として含む I 上のウルトラフィルター $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(I)$ が存在する。ここで、 \mathcal{E} が有限交叉性を持つとは、任意の $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ に対して $A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$ であること。

[定理 1 の証明](\Rightarrow) は明らかなので (\Leftarrow) を示す。 $I = \mathcal{P}_{\text{fin}}(T)$, つまり T の有限部分集合全体とする。仮定より、各 $S \in I$ に対し S のモデル $\mathfrak{A}_S \models S$ が存在する。 I の部分集合 J_φ を $J_\varphi = \{S \in I : \mathfrak{A}_S \models \varphi\}$ で定め、 $\mathcal{E} = \{J_\varphi \in \mathcal{P}(I) : \varphi \in T\}$ とする。この \mathcal{E} は有限交叉性を持つ: [\cdot : $J_\varphi, \dots, J_\psi \in \mathcal{E}$ を仮定して $J_\varphi \cap \dots \cap J_\psi \neq \emptyset$ を示せばよい。 $\{\varphi, \dots, \psi\}$ は T の有限部分集合なので、仮定よりモデル $\mathfrak{A}_{\{\varphi, \dots, \psi\}} \models \{\varphi, \dots, \psi\}$ が存在する。このとき $\mathfrak{A}_{\{\varphi, \dots, \psi\}} \models \varphi$, かつ、 \dots , かつ、 $\mathfrak{A}_{\{\varphi, \dots, \psi\}} \models \psi$. よって J_φ と J_ψ の定義から $\{\varphi, \dots, \psi\} \in J_\varphi$, かつ、 \dots , かつ、 $\{\varphi, \dots, \psi\} \in J_\psi$. よって $\{\varphi, \dots, \psi\} \in J_\varphi \cap \dots \cap J_\psi$. よって $J_\varphi \cap \dots \cap J_\psi \neq \emptyset$]. したがって、補題 5 より \mathcal{E} は I 上のウルトラフィルター $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(I)$ に拡大できる。 $\mathfrak{A}^* = \prod_{S \in I} \mathfrak{A}_S / \mathcal{U}$ を超積とする。すると、実は $\mathfrak{A}^* \models T$ である: [\cdot : $\forall \varphi \in T (\mathfrak{A}^* \models \varphi)$ をいえばよい。ところがこれはLośの定理(定理 4 式 (1)) より $\forall \varphi \in T (\{S \in I : \mathfrak{A}_S \models \varphi\} \in \mathcal{U})$ つまり $\forall \varphi \in T (J_\varphi \in \mathcal{U})$ と同値。ところがこれは $J_\varphi \in \mathcal{E}$ と $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{U}$ から明らかに成り立つ]. □

参考文献

- [1] 小野寛晰, 『情報数学セミナー-情報科学における論理』, 日本評論社, 1994 年.
- [2] 石井大海, 「超積によるコンパクト性定理の証明と超準モデル-君の知らない自然数-」, <http://konn-san.com/math/ultraproduct.pdf>.
- [3] 田中一之編, 『ゲーデルと 20 世紀の論理学 (2) 完全性定理とモデル理論』, 東京大学出版会, 2006 年.
- [4] 田中一之, 『数の体系と超準モデル』, 裳華房, 2002 年.
- [5] 中村徹, 『超準解析と物理学』, 日本評論社, 1998 年.