数学を数学するお話

数物セミナー春の大談話会 2016@KOBE

近藤 友祐

神戸大学工学部電気電子工学科 3 年

June 19, 2016

謝辞 & ご案内

- 本日の企画運営をしていただきました皆様に, この場を借りて感謝申し上げます.
- このスライドは http://elecello.com/ からダウンロードできます.
- Twitter: @elecello_

目標

数理論理学に興味を持ってもらう

内容

1. 導入
   - 形式化ということ
   - ことの起こり
2. 述語論理と公理的集合論
   - 集合論の “外側” での一階述語論理
   - ZFC 集合論
3. 集合論から
   - 順序数
   - 基数
4. 述語論理再び
   - 集合論の “内側” での一階述語論理

第1部：導入

数理論理学は何を対象とした数学か

極めて雑な言い方だが,

- 幾何学は図形や空間についての数学
- 微分積分学は変化やその集積についての数学
- 群論は対称性についての数学
- 数理論理学は数学についての数学

どういうことか？

形式化ということ

- 数学で用いられる論理が何らかの数学的構造を持つことは明白.
- ところが「数学そのもの」を「生のまま」の形で数学の対象と考えるには困難が多すぎる. 証明とは？論理とは？
- そこで, 数学の営みを模した数学の形式的体系を, ある種の有限記号列の操作として定式化する.
- 「有限記号列の操作」は数学的に扱えるから, 数学の立場から数学の形式的体系を論じることができる.

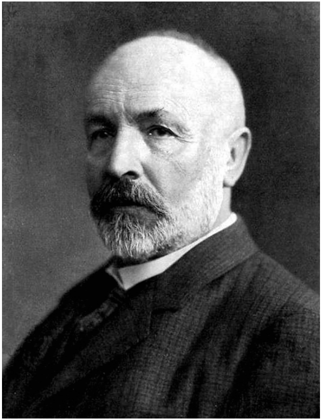
「論じる側」の数学をメタ数学と呼んで,「論じられる側」の形式的体系と区別することがある.

そもそも

なんでこんな事考え始めたの？

Cantor の集合論と無限

- Cantor による集合論
- 無限に関する数学を切り開いた
- もっとも有名なのは「無限にも異なる大きさがある」ことを示した Cantor の定理



写像で集合のサイズを比べる

Definition 1

- 全単射 $X \to Y$ がある時，$X \approx Y$ と書く．
- 単射 $X \to Y$ がある時，$X \preccurlyeq Y$ と書く．
- $X \prec Y \Leftrightarrow X \preccurlyeq Y$ and $X \not\approx Y$.

- $X \approx Y$ は「Y のサイズは X のサイズと同じ」を意味する．
- $X \prec Y$ は「Y のサイズは X のサイズよりも大きい」を意味する．
- 例えば，$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q} \prec \mathbb{R} \approx \mathbb{C}$.

冪集合

Definition 2

集合 A の**冪集合** $\mathcal{P}(A)$ とは，A の部分集合全体からなる集合．すなわち，

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

Example

$\mathcal{P}(\{0,1,2\}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}.$
A が有限なら $\mathcal{P}(A)$ の元の数はいくつになりますか？

Cantor の定理

Theorem 3 (Cantor)

任意の集合 A に対し，$A \prec \mathcal{P}(A)$.

Proof

単射 $A \ni a \mapsto \{a\} \in \mathcal{P}(A)$ があるので $A \preccurlyeq \mathcal{P}(A)$ はよい．よって示すべきは $A \not\approx \mathcal{P}(A)$.
$A \approx \mathcal{P}(A)$ を仮定して矛盾を導く．全射 $f : A \to \mathcal{P}(A)$ を固定する.

Cantor の定理の証明の続き

Proof (続き)

A の部分集合 D を，

$$D := \{x \in A : x \notin f(x)\}$$

で定める．この時，

$$x \in D \Leftrightarrow x \notin f(x) \text{ and } x \in A.$$

さて，この D は A の部分集合なので $\mathcal{P}(A)$ の元である．f は全射なので $f(d) = D$ なる $d \in A$ が存在する．この d について，

$$d \in D \Leftrightarrow d \notin f(d)\,(= D)$$

となり矛盾． $\square$

このようなタイプの議論を**対角線論法**という．

集合論による数学の基礎付け

また，数学的対象のすべては集合で表現できるから，集合論によって数学を基礎付けられる！

- 数 (例えば 3 は $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ という集合)
- 関係 (順序対の集合．順序対概念も集合の言葉で書ける)
- 函数 (2 項関係の特別な場合)

集合論最強なのでは？
ところが，集合論のパラドクスがたくさん見つかる．

「すべての集合の集合」?

Paradox 1

「すべての集合の集合 V」を考えると変なことになる.

Description

集合 $W = \mathcal{P}(V)$ を考える. Cantor の定理から $V \prec W$ である. 一方, $W = \mathcal{P}(V)$ の元は V の部分集合なので集合である. したがって $x \in W \Rightarrow x \in V$ であり, $W \subseteq V$ である. よって $W \preccurlyeq V$ である. Bernstein の定理より $V \approx W$ だが, これは $V \prec W$ に矛盾.

Russell のパラドクス

Cantor のパラドクスでは問題の所在が不明瞭だが，これをごく単純化した Russell のパラドクスは集合概念そのものに潜む危うさを明らかにした．

Paradox 2

$R = \{x : x \notin x\}$ を考えると変なことになる．

Description

$R \in R$ か $R \notin R$ のどちらかが成り立つはずであるが，$R \in R$ を仮定すると $R \notin R$ が導け，$R \notin R$ を仮定すると $R \in R$ が導けるので矛盾．

内包公理

Russell のパラドクスは，集合概念に自然に要求される次の内包公理から生じていると考えられる．

内包公理

$\varphi(x)$ をモノ x についての性質とする．このとき，φ を満たすものすべてを集めた集合 $A = \{x : \varphi(x)\}$ が存在する (このとき，$a \in A \Leftrightarrow \varphi(a)$ である)．

このようなごく自然な要請から矛盾が出てしまい，とてもつらい．しかしよく考えると，そもそも「モノ」だとか「性質」だとかいう言葉が何を指すのかよくわからない．

コトバの問題

次の Berry のパラドクスもわけがわからん.

Paradox 3

「21 文字の日本語で定義できない最小の自然数」を考えると変なことになる.

Description

「21 文字の日本語で定義できない最小の自然数」は (その定義より)21 文字の日本語で定義できないが, 皮肉にも「21 文字の日本語で定義できない最小の自然数」という 21 文字の日本語で定義できている.

Hilbert 計画

- 数学基礎論論争
- 論理主義・直観主義・形式主義の三派
- 形式主義のリーダ Hilbert
- Hilbert 計画
  1. 数学の形式化
  2. 無矛盾性証明
  3. 完全性証明

第1部のまとめ

- 集合概念を素朴に扱うと矛盾が生じる.
- しかし集合論は非常に有用で捨てたくない.
- 形式的体系を導入・正当化することで集合論を救おう.

第2部：述語論理と公理的集合論

第 2 部の目標

普通の数学の立場よりもかなり厳しい立場に立ち，数学の営みを模した数学の形式的体系を有限的な記号操作の形で定式化する

第 2 部での約束：

- 各々の自然数 $0, 1, 2, \ldots$ の存在や，その上の弱い再帰と帰納法は認める
- 一般の実数の存在は認めない
- 当然，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の存在は認めない
- そもそも集合概念を認めない

第 2 部で集合の記法を用いたときは，それは単なる日本語表現の略記だと思うことにする．例えば,「$a \in \{2, 5\}$」は「a は 2 に等しい，または，a は 5 に等しい」という日本語の略記に過ぎないと考える．

古典一階述語論理

形式的体系には色々あるが，ここでは特に重要な古典一階述語論理の形式的体系のうち Hilbert 流と呼ばれるものを扱う.

述語論理の論理式に用いられる記号

- 論理的記号
  - 変数記号: $v_0, v_1, v_2, \ldots$
  - 論理結合子: $\neg, \to$
  - 量化子: $\forall$
  - 等号: $=$
  - 補助記号: $($, $)$, $,$(カンマ)
- 非論理的記号 (以下からいくつか指定したもの)
  - 函数記号: $f_0, f_1, f_2, \ldots$
  - 定数記号: $c_0, c_1, c_2, \ldots$
  - 関係記号: $r_0, r_1, r_2, \ldots$

指定された非論理的記号の集まりを言語といい，しばしば $\mathcal{L}$ で表す．$\mathcal{L}$ の各函数記号，関係記号には項数と呼ばれる 1 以上の自然数が割り当てられているとする．0 項記号の扱いにはいろいろな流儀があり，今日も割と適当に扱う．

項

直感的には,「$3+14$ は素数である」の「$3+14$」のように，文章の「主語」に当たるものが項.

Definition 4

$\mathcal{L}$ 項 (あるいは単に項とも) は以下のように再帰的に定義される有限記号列：

- 各変数記号 v_i は (1 文字の記号列として) 項.
- $\mathcal{L}$ の各定数記号 c_i は (1 文字の記号列として) 項.
- $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ が項で f が $\mathcal{L}$ の n 項函数記号ならば，記号列 $f(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$ も項.
- 以上のみが項である.

原子論理式

項(「主語」)を等号や関係記号(「述語」)で結んだものが原子論理式.

Definition 5

$\mathcal{L}$ 原子論理式 (あるいは単に原子論理式とも) は以下のいずれかの形の有限記号列：

- $(\tau_0 = \tau_1)$，ただし τ_0, τ_1 は $\mathcal{L}$ 項.
- $p(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$，ただし $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ は $\mathcal{L}$ 項で p は $\mathcal{L}$ の n 項関係記号.

論理式

Definition 6

$\mathcal{L}$ 論理式 (あるいは単に論理式とも) は以下のように再帰的に定義される有限記号列：

- 原子論理式はすべて論理式.
- φ_0, φ_1 が論理式ならば，記号列 $(\neg\varphi_0)$ や記号列 $(\varphi_0 \to \varphi_1)$ も論理式.
- v が変数記号で φ が論理式ならば記号列 $(\forall v \varphi)$ も論理式.
- 以上のみが論理式である.

特に，$\forall$ で「縛られている」変数記号を束縛変数，そうでない変数記号を自由変数という．自由変数の無い $\mathcal{L}$ 論理式を $\mathcal{L}$ 文という.

ちょっとした約束と補足

- 可読性のため冗長な括弧は省略する
  - 実はポーランド記法を使えば括弧とカンマは最初から不要
- 変数記号を $x, y, z, \ldots$ などでも表すことにする
- 省略記号として $\wedge, \vee, \leftrightarrow, \exists$ を用いる
  - $\varphi \wedge \psi$ は $\neg(\varphi \to \neg\psi)$ の略記
  - $\varphi \vee \psi$ は $(\neg\varphi) \to \psi$ の略記
  - $\varphi \leftrightarrow \psi$ は $\neg((\varphi \to \psi) \to \neg(\psi \to \varphi))$ の略記
  - $\exists x \varphi$ は $\neg\forall x \neg\varphi$ の略記
- 項 $f(\tau_0, \tau_1)$ や原子論理式 $p(\tau_0, \tau_1)$ は $\tau_0 f \tau_1$ とか $\tau_0 p \tau_1$ と書くことが多い
  - つまり $+(1, 3)$ とか $\leq (5, 6)$ とは書かずに $1 + 3$ とか $5 \leq 6$ と書く

例

算術の言語 $\mathcal{L}_A = \{+, \times, 0, 1, \leq\}$

- $+, \times$ は 2 項函数記号
- $0, 1$ は定数記号
- $\leq$ は 2 項関係記号

以下は (省略された)$\mathcal{L}_A$ 論理式の例．特に下は $\mathcal{L}_A$ 文．

- $\forall x(x \times y \leq z \wedge w \leq x + 1 \rightarrow y = z)$
- $\forall x \forall y \forall z(x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$

以下は $\mathcal{L}_A$ 論理式ではない．

- $x \leq y \neg \wedge y \leq z \forall \times x$

再三注意

これで論理式が定義できたが,

論理式は意味など持たないただの記号列である

ことに注意しよう.
続いて，論理式の有限列として形式的証明の概念を定義していく.

出発点：論理的公理

Definition 7

φ, ψ, ρ を論理式，τ を項，x, y, z を変数記号とする．以下の形の論理式を S_1 の論理的公理という：

Ax.1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

Ax.2 $(\varphi \to (\psi \to \rho)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \rho))$

Ax.3 $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

Ax.4 $\forall x\varphi \to \varphi[\tau/x]$

Ax.5 $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi)$

Ax.6 $\forall x(x = x)$

Ax.7 $\forall x\forall y(x = y \to (\varphi[x/z] \to \varphi[y/z]))$

ただし，$\varphi[\tau/x]$ は φ の自由変数 x に項 τ を代入した論理式を表す(若干の注意が必要).

出発点：非論理的公理

Definition 8

いくつかの $\mathcal{L}$ 文の集まりを理論あるいは公理系といい，T 等の文字であらわす．理論 T の要素を T の非論理的公理 (あるいは単に公理) という．

代表的な公理系：

- 算術の言語 $\mathcal{L}_A = \{+, \times, 0, 1, \leq\}$ での公理系 PA
- 集合論の言語 $\mathcal{L}_\in = \{\in\}$ での公理系 ZFC

ステップ：推論規則

Definition 9

以下の 2 つの規則を S_1 の**推論規則**という：

MP φ と $\varphi \to \psi$ から ψ を得る.

G φ から $\forall x \varphi$ を得る.

形式的証明

論理式のある種の有限列として形式的証明の概念を導入する.

Definition 10

$\mathcal{L}$ 論理式の有限列 $\langle \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \rangle$ が T から φ_{n-1} を導く形式的証明であるとは，各 $0 \leq i < n$ について，以下のいずれかが成り立つことをいう：

- φ_i は論理的公理である.
- $\varphi_i \in T$.
- φ_i は φ_j, φ_k から推論規則 MP で導かれる (但し $j, k < i$).
- φ_i は φ_j から推論規則 G で導かれる (但し $j < i$).

論理式 φ が T の形式的定理である，あるいは T から形式的証明可能であるとは，T から φ を導く形式的証明が存在することをいう．このことを $T \vdash \varphi$ と書く．特に T が空であるときは $\vdash \varphi$ と書き，φ は S_1 の形式的定理であるという.

形式的証明の例

(板書します)

論理的公理を一部再掲

Ax.1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

Ax.2 $(\varphi \to (\psi \to \rho)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \rho))$

形式的証明の例・もう１つ

Example

φ, ψ を任意の論理式とする．$\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ は S_1 の形式的定理である．

- 実際，$\langle \rho_0, \dots, \rho_6 \rangle$ は $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ の形式的証明である：

ρ_0 $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$ [Ax.3]

ρ_1 $((\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)) \to (\neg\varphi \to ((\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)))$ [Ax.1]

ρ_2 $\neg\varphi \to ((\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi))$ [ρ_0, ρ_1; MP]

ρ_3 $(\neg\varphi \to ((\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi))) \to ((\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)) \to (\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)))$ [Ax.2]

ρ_4 $(\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)) \to (\neg\varphi \to (\varphi \to \psi))$ [ρ_2, ρ_3; MP]

ρ_5 $\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ [Ax.1]

ρ_6 $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ [ρ_4, ρ_5; MP]

形式的体系の「有限性」

以上で述語論理の形式的体系 S_1 の定義を終わる．これらで用いられた概念は有限記号列の有限的操作だったので,「与えられた有限記号列 $\langle s_0, \ldots, s_{n-1} \rangle$ が論理式かどうか」「与えられた有限記号列の有限列 $\langle \sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1} \rangle$ が形式的証明かどうか」などはコンピュータや人の手で機械的に判定できる.

無矛盾性と完全性

Definition 11

- T が矛盾するとは，ある論理式 φ が存在して，$T \vdash \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$ となることをいう．
  - T が無矛盾であるとは T が矛盾しないこと．
- T が完全であるとは，すべての論理式 φ に対し，$T \vdash \varphi$ または $T \vdash \neg\varphi$ となることをいう．
  - T が不完全であるとは T が完全でないこと．

矛盾する公理系は最強である？

Lemma 12

T が矛盾する $\Leftrightarrow$ 任意の論理式 ψ に対し $T \vdash \psi$

Proof

$(\Leftarrow)$：明らか．
$(\Rightarrow)$：T は矛盾するので $T \vdash \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$ を満たす論理式 φ が存在する．一方，先の例から任意の論理式 ψ に対して
$T \vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ なので，MP を 2 回用いて $T \vdash \psi$ である． $\square$

Corollary 13

T が矛盾する $\Rightarrow$ T は完全である

このような T は無意味なので，無矛盾かつ完全なものが欲しい．

対象とメタ

いちいち形式的定理とか形式的証明というのは面倒なので，以降単に定理とか証明という．さて，次の２つに現れる「定理」の違いがおわかりだろうか？

- 「$\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$」は定理である．
- 「T が矛盾する $\Rightarrow$ T は完全である」は定理である．

上は「形式的定理」の意味での「定理」．
下は「形式的体系について成り立つ言明」の意味での「定理」．
上のような「定理」を「形式的定理」，下のような「定理」を「メタ定理」といって区別することがある．

ZFC 集合論

言語や公理系には様々なバリエーションがある．算術の言語 $\mathcal{L}_A$ での PA でもかなり豊かな数学が展開できるが実数論は厳しい．集合論の言語 $\mathcal{L}_\in$ での公理系 ZFC は，その枠組みの中で標準的な全数学以上の数学を展開できるほど強力．今日は ZFC を扱う．

集合論の言語

集合論の言語 $\mathcal{L}_\in$ は 2 項関係記号 $\in$ だけからなる：$\mathcal{L}_\in = \{\in\}$. つまり集合論の論理式は $\neg, \to, \forall, =, \in, (,), , , v_0, v_1, v_2, \ldots$ のみを用いた有限記号列.

$\varnothing, \subseteq, \mathcal{P}, \bigcup \cdot, \{\cdot, \cdot\}$ 等々の記法は略記にすぎず，原理的には一切略記を用いない論理式で書けることに注意されたい.

しかし，これらの非論理的記号を $\mathcal{L}_\in$ に追加し，対応する公理を ZFC に追加するというやり方もある．これらも $\mathcal{L}_\in$，ZFC と呼んでしまうことにする.

ZFC の公理 Part 1

以下の $\mathcal{L}_\in$ 文全体を ZFC という (ただし論理式の全称化は省略し，種々の略記を用いている).

0. 集合の存在公理：$\exists x(x = x)$.
1. 外延性公理：$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y$.
2. 基礎の公理：$\exists y(y \in x) \to \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y))$.
3. 分出公理図式：y を自由変数に持たない $\mathcal{L}_\in$ 論理式 φ それぞれに対して，$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi(x))$.
4. 対公理：$\exists z(x \in z \wedge y \in z)$.
5. 和集合公理：$\exists A \forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \to x \in A)$.
6. 置換公理図式：B を自由変数に持たない $\mathcal{L}_\in$ 論理式 φ それぞれに対して，$\forall x \in A \exists! y \varphi(x, y) \to \exists B \forall x \in A \exists y \in B \varphi(x, y)$.

ZFC の公理 Part 2

7. 無限公理：$\exists x(\emptyset \in x \land \forall y \in x(S(y) \in x))$,
   但し $S(y) := y \cup \{y\}$.
8. 冪集合公理：$\exists y \forall z(z \subseteq x \to z \in y)$.
9. 選択公理：
   $\emptyset \notin F \land \forall x \in F \forall y \in F(x \neq y \to x \cap y = \emptyset)$
   $\to \exists C \forall x \in F(\mathrm{SING}(C \cap x))$,
   但し $\mathrm{SING}(x) \leftrightarrow \exists y \in x \forall z \in x(z = y)$.

集合論では，すべての対象が集合であると考える．つまり，変数記号が表すものはすべて「集合」．

分出公理図式とクラス

- 分出公理図式は，既存の集合 z から $\varphi(x)$ を満たす部分を「切り取った」ものが集合であることを主張している．
- すなわち，$\{x : \varphi(x)\}$ が集合かどうかはわからないが，$\{x \in z : \varphi(x)\}$ は集合であるといえる．

Definition 14

$A = \{x : \varphi(x)\}$ の形で naïve に定めた「集まり」をクラス (class) と呼ぶ．A は

- $\mathrm{ZFC} \vdash \exists A \forall x (x \in A \leftrightarrow \varphi(x))$ であるとき，集合．
- $\mathrm{ZFC} \vdash \neg\exists A \forall x (x \in A \leftrightarrow \varphi(x))$ であるとき，真のクラス．

例えば「集合全体の集まり $V = \{x : x = x\}$」「Russell のパラドクスにおける $R = \{x : x \notin x\}$」は真のクラス．

ZFC 内での「普通の数学」の展開

ZFC の中で，次のようなものが構成できる：

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ などの無限集合．
- それらの上の函数や関係．
- etc.

「有限記号列の有限的操作」で「無限集合をうまくシミュレートできている」ような状況．
以降，ZFC の住人になって議論を進める．つまり，日本語で議論を進めるが，その議論はすべて $\mathcal{L}_{\in}$ 論理式の有限列に翻訳可能．

第2部のまとめ

- 「有限記号列いじり」として形式的体系 S_1 を定義した．
- この枠組みに公理的集合論を載せることで，無限を含む数学をうまく有限的にシミュレートできる．

第3部：集合論から

第 3 部の目標

集合論の主な興味対象である順序数と基数についてごく簡単に紹介する

第 3 部での約束：

- 時間の都合上，少々informal な説明をする．

順序数

順序数とは,

- 自然数概念のある種の拡張.
- 整列集合の「モノサシ」.
- 集合論において中心的な役割を果たす重要な概念.

大方の順序数論は ZFC の部分公理系 $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$ で展開できる.

順序数の定義

Definition 15

集合 z が順序数であるとは，以下の 3 条件が成り立つこと．

1. z は推移的集合である：$\forall x, y(x \in y \in z \to x \in z)$
2. $\in$ が z 上の狭義全順序である：
    - 非反射律：$\forall y \in z\,(y \notin y)$
    - 推移律：$\forall u, v, w \in z\,(u \in v \in w \to u \in w)$
    - 三分律：$\forall x, y \in z\,(x \in y \vee x = y \vee y \in x)$
3. $\in$ が z 上の整礎関係である：

$$\forall x \subseteq z\,(x \neq \varnothing \to \exists y \in x \neg \exists w \in x\,(w \in y)).$$

(2)(3) の条件を合わせて z の整列性という．以降，順序数はギリシア文字で表す．

順序数の直感的イメージ

(板書します)

順序数全体の集まり ON は真のクラス Part 1

Theorem 16

ON は真のクラスである．つまり，
$\mathrm{ZFC} \vdash \neg\exists ON\, \forall x\, (x \in ON \leftrightarrow x \text{ is an ordinal})$

これを示すために，まず ON が推移的クラスで，さらに $\in$ によって整列されることを示す．

順序数全体の集まり ON は真のクラス Part 2

Lemma 17

ON は推移的クラスである．すなわち，$z \in \alpha \in ON \to z \in ON$.

Proof

$z \in \alpha \in ON$ を仮定して，z が推移的集合であることと z が $\in$ で整列されることを示せばよい．前半は，α が推移的集合であることと $\in$ が α 上の推移律を満たすことから導ける．後半は，α が推移的集合であることより $z \subseteq \alpha$ がわかり，$\in$ が α 上の整列順序であることから明らか (整列集合の部分集合は整列集合). □

順序数全体の集まり ON は真のクラス Part 3

Lemma 18

$\in$ は ON 上の狭義全順序関係である.

Proof

略 (非反射律，推移律，三分律の 3 つを頑張って示せばいい). $\square$

順序数全体の集まり ON は真のクラス Part 4

Lemma 19

$\in$ は ON 上の整礎関係である．つまり，ON の任意の部分集合には $\in$ に関する極小元が存在する．

Proof

$X \neq \varnothing$ を順序数の集合とする．$X \neq \varnothing$ なので $\alpha \in X$ がとれる．集合 $X \cap \alpha = \{\xi \in X : \xi \in \alpha\}$ を作る．これが空なら α が X の極小元．そうでなければ，$\varnothing \neq X \cap \alpha \subseteq \alpha$ と α の整列性から $X \cap \alpha$ には極小元 β がある．この β は $X \cap \alpha$ の $\in$ 極小元であるが，X の極小元でもある：
もし $\gamma \in X$ が $\gamma \in \beta$ を満たすなら，$\gamma \in \beta \in \alpha$ と α の推移性から $\gamma \in \alpha$ となり，$\gamma \in X$ かつ $\gamma \in \alpha$ なので $\gamma \in X \cap \alpha$. これと $\gamma \in \beta$ より β の $X \cap \alpha$ における極小性に矛盾. □

順序数全体の集まり ON は真のクラス Part 4

Proof of Theorem 16

ON が集合なら Lemma 17, 18, 19 より $ON \in ON$ だが，これは ON 上の $\in$ の非反射律に矛盾． $\square$

順序数の何が嬉しいの？

順序数を導入しておくと嬉しいことがたくさんある．

- どんな整列集合も，ある (unique な) 順序数と順序同型．
- 順序数の上では，自然数の上の帰納や再帰よりかなり強力な**超限帰納法**，**超限再帰法**が使える．

Theorem 20

ON の任意の空でない部分<u>クラス</u>には最小元が存在する．

Proof

ON 上の $\in$ の整礎性の証明と類似． □

基数の定義

以降，ZFC の公理をフルで認める．
基数は集合のサイズを測るモノサシとなる特別な順序数．

Definition 21

順序数 κ が基数であるとは,

$$\forall \xi < \kappa \, [\xi \prec \kappa]$$

であること．

濃度の定義

Definition 22

整列可能な集合 A に対し，A の濃度 $|A|$ は，

$$|A| = \min\{\alpha \in ON : \alpha \approx A\}$$

で定義される順序数である．

選択公理のもとでは任意の集合が整列可能なので，どんな集合 A に対しても $|A|$ が定義される．

Lemma 23

κ が基数である $\leftrightarrow |\kappa| = \kappa$

基数に関する補題

Lemma 24

集合 A, B に対し，

- $|A|$ は基数．
- $A \approx B \leftrightarrow |A| = |B|$.
- $A \preccurlyeq B \leftrightarrow |A| \leq |B|$.
- $A \prec B \leftrightarrow |A| < |B|$.

Lemma 25

ω は基数である．

ω が基数であることを強調して，ω のことを $\aleph_0$ とも書く．

$\aleph_1$

以下は実は選択公理無しでも言えるが，今日は選択公理を使う．

Lemma 26

$\aleph_0$ よりも真に大きい基数のうち，最小のものが存在する．

Proof

Cantor の定理から $\omega \prec \mathcal{P}(\omega)$ なので $\aleph_0 < |\mathcal{P}(\omega)|$. よって $\{\kappa \in ON : \kappa \text{ is a cardinal} \wedge \aleph_0 < \kappa\}$ は空でない ON の部分クラスである．したがって，その最小元が存在する． $\square$

$\aleph_0$ よりも真に大きい最小の基数を $\aleph_1$ と書く．また，基数 $|\mathcal{P}(\omega)|$ を $2^{\aleph_0}$ あるいは $\mathfrak{c}$ と書く．定義から $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$ は明らか．

連続体仮説

連続体仮説 CH

$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$?

Cantor を悩ませたこの問題は，次のような解決が得られた：

Theorem 27 (Gödel 1938, Cohen 1963)

連続体仮説は ZFC から独立．つまり，ZFC が無矛盾ならば，$\mathrm{ZFC} + \mathrm{CH}$ も $\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{CH}$ も無矛盾．

今はこのあたりを勉強中です．

超限再帰法の例 ($\aleph$ 函数)

どんな基数 κ にも,「次に大きい基数」κ^+ が存在することと，基数の集合の $\sup(=\bigcup)$ が基数であることが証明できる．よって，超限再帰法を用いて次のような $\aleph : ON \to Card$ が定義できる．

Definition 28

- $\aleph_0 = \omega$.
- $\aleph_{\xi+1} = \aleph_\xi^+$.
- $\aleph_\eta = \bigcup_{\xi<\eta} \aleph_\xi$, for a limit ordinal η.

ℶ 函数もある：

Definition 29

- $\beth_0 = \omega$.
- $\beth_{\xi+1} = 2^{\beth_\xi}$.
- $\beth_\eta = \bigcup_{\xi<\eta} \beth_\xi$, for a limit ordinal η.

第3部のまとめ

- ZFC 集合論では順序数論や基数論が展開できる.
- ZFC 集合論では強い形の帰納法・再帰法が使える.

第4部：述語論理再び

第 4 部の目標

第 2 部でやった述語論理の構成 (述語論理の構文論) を集合論の中で繰り返す．また集合論の中では無限集合を含む構造を定義できるから，述語論理の意味論を十分に展開できる．

第 4 部での約束：

- 引き続き ZFC の住人になる．
- とても informal な立場からの紹介にとどめる．

集合論の中での記号の扱い Part 1

集合論の中で「記号」を扱う：

- 「変数記号」v_i は集合 $(0, 0, i)$ の略記.
- 「k 項函数記号」$\mathsf{f}_\mathsf{i}^\mathsf{k}$ は集合 $(1, k, i)$ の略記.
- 「k 項関係記号」$\mathsf{r}_\mathsf{i}^\mathsf{k}$ は集合 $(2, k, i)$ の略記.
- 「否定記号」$\neg$ は集合 $(3, 0, 0)$ の略記.
- 「含意記号」$\rightarrow$ は集合 $(3, 0, 1)$ の略記.
- $\vdots$
- 「カンマ」, は集合 $(3, 0, 6)$ の略記.

ただし，$(x, y, z) := (x, (y, z))$, $(u, v) := \{\{u\}, \{u, v\}\}$.

集合論の中での記号の扱い Part 2

述語論理で使われる記号のコードをすべて集めた集合を Symbols とする：

$$\mathsf{Symbols} = \mathsf{LogSym} \cup \left(\bigcup_{k\in\omega} \mathsf{FuncSym}_k \right) \cup \left(\bigcup_{k\in\omega} \mathsf{RelSym}_k \right),$$

ただし，$\mathsf{LogSym} := \{(0,0,i) : i \in \omega\} \cup \{(3,0,i) : 0 \leq i < 7\}$，
$\mathsf{FuncSym}_k := \{(1,k,i) : i \in \omega\}$，$\mathsf{RelSym}_k := \{(2,k,i) : i \in \omega\}$．

集合論の中での記号列の扱い

集合論の中で，S の元の有限列 $\sigma = \langle s_0, \dots, s_{n-1} \rangle$ は，函数 $\sigma : n \to S$ として扱われる．

$$\sigma(0) = s_0, \quad \dots, \quad \sigma(n-1) = s_{n-1}$$

S の有限列全体の集合を $S^{<\omega}$ と書く．

集合論の中での述語論理 Part 1

$\mathsf{NonLogSym} := \left(\bigcup_{k\in\omega} \mathsf{FuncSym}_k\right) \cup \left(\bigcup_{k\in\omega} \mathsf{RelSym}_k\right)$ とし，
$\mathsf{L} \subseteq \mathsf{NonLogSym}$ とする．

- "$x \in \mathsf{Symbols}^{<\omega}$ が L 項である"
- "$x \in \mathsf{Symbols}^{<\omega}$ が L 論理式である"
- "$x \in \mathsf{Symbols}^{<\omega}$ が L 文である"

を表す (本物の)$\mathcal{L}_\in$ 論理式が書けるし，これを使って L 項，論理式，文全体の集合 Term_L, Fml_L, Sent_L が定義できる．
例えば，$\mathsf{L}_\epsilon := \{\epsilon\}$ として，ZFC に対応する集合 $\mathsf{ZFC} \subseteq \mathsf{Sent}_{\mathsf{L}_\epsilon}$ を考えたりできる．

集合論の中での述語論理 Part 2

$\mathsf{T} \subseteq \mathsf{Sent}_{\mathsf{L}}$ とする．このとき，

- “$x \in \mathsf{Fml}_{\mathsf{L}}{}^{<\omega}$ が T からの$\ulcorner\varphi\urcorner$の形式的証明である”

を表す (本物の)$\mathcal{L}_{\in}$ 論理式が書ける． これを使って，

- “$\ulcorner\varphi\urcorner$ が T から証明できる”

を表す $\mathcal{L}_{\in}$ 論理式 $\mathrm{Pr}(\mathsf{T}, \ulcorner\varphi\urcorner)$ や，

- “T は無矛盾である”

を表す $\mathcal{L}_{\in}$ 論理式 $\mathrm{Con}(\mathsf{T})$ が書ける．

第 2 不完全性定理

次は，Gödel の第 2 不完全性定理 (1931) のインスタンス．

Theorem 30

ZFC が無矛盾ならば，$\mathrm{ZFC} \nvdash \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$

今後，記号の濫用をして，メタ的な記号と対象的な記号に同じ記号を使ったりする．例えば T と T，$\mathcal{L}$ と L を同一視したり，$\mathrm{Pr}(\mathsf{T}, \ulcorner\varphi\urcorner)$ を $T \vdash \varphi$ と書いてしまうことにする．

これは少し危険で，例えば “$T \vdash \varphi$ ならば $\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{Pr}(\mathsf{T}, \ulcorner\varphi\urcorner)$” は言えるが，一般に逆は言えない．いわば，外の世界を内の世界にそのまま持ち込むことは出来るが，内の世界から外に出すことはできず，無理に引き出そうとするとお化けのようなものが出てくるかもしれない．完全性定理を $(\mathrm{ZFC} \vdash)$ “$T \vdash \varphi \leftrightarrow T \models \varphi$” でなく $\mathrm{ZFC} \vdash$ “$\mathrm{Pr}(\mathsf{T}, \ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \forall\mathfrak{A}\,[\forall x \in \mathsf{T}\,\mathrm{Sat}(\mathfrak{A}, x) \to \mathrm{Sat}(\mathfrak{A}, \ulcorner\varphi\urcorner)]$” などと書かねばならないのはあまりにも煩雑なのでこのような記法の濫用をする．以降「内側にとどまって」議論するので，外側の記法を内側に流用したまでである．

述語論理の意味論

ここまでで，述語論理の「有限の記号操作」とか「形式的証明可能性」という側面に注目し,「意味」は考えてこなかった．このような立場を「構文論」という.
対して，真理値を「意味」と考え,「充足可能である」とか「真である」という側面に注目する立場を述語論理の「意味論」という.
構文論では $T \vdash \varphi$ を定義したが，意味論では $T \models \varphi$ を定義する.

構造

構造とは群や順序環のような構造付けられた集合をイメージすればよい．

Definition 31

$\mathcal{L} = \{f, \dots, c, \dots, r, \dots\}$ を言語とする．
$\mathfrak{A} = \langle A; f^{\mathfrak{A}}, \dots, c^{\mathfrak{A}}, \dots, r^{\mathfrak{A}}, \dots \rangle$ が $\mathcal{L}$ 構造であるとは，

- A は非空集合
- $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$($f$ は n 項函数記号)
- $c^{\mathfrak{A}} \in A$
- $r^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$($r$ は n 項関係記号)

であること．

f, c, r がただの「記号 (のコード)」であるのに対し，$f^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}, r^{\mathfrak{A}}$ は (集合論の中の) 函数，定数，関係である．

充足関係

Definition 32

$\mathfrak{A} \models \varphi$ を，文 φ が構造 $\mathfrak{A}$ の上で正しいことと定義する．

この定義はイイカゲンだが，真面目にやるには集合論の中で φ の複雑さ (と付値) に関する再帰で定義．

メタ数学的注意をすると，L 構造 $\mathfrak{A}$ と $\ulcorner\varphi\urcorner \in \mathrm{Sent}_{\mathrm{L}}$ に対して “$\ulcorner\varphi\urcorner$ は $\mathfrak{A}$ の上で正しい” を表す本物の $\mathcal{L}_{\in}$ 文 $\mathrm{Sat}(\mathfrak{A}, \ulcorner\varphi\urcorner)$ が書き下せ，これを単に $\mathfrak{A} \models \varphi$ と書くと約束している，ということ．但し，$\mathfrak{A}$ は集合である必要があり，真のクラスではそういうことができない．真のクラスの場合の “充足関係” は「相対化」という別の概念で代用され，両者の区別はメタ数学的に重要である．

モデル

Definition 33

$\mathfrak{A}$ が公理系 T のモデルである $\mathfrak{A} \models T \quad \leftrightarrow \quad \forall \varphi \in T\,(\mathfrak{A} \models \varphi)$

Example

$\mathcal{L} = \{e, \mu, i\}$ とし，$\mathcal{L}$ 構造 $\mathfrak{Z}$ を $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}; 0, +, -)$ とする．このとき，$\mathfrak{Z} \models \{\text{group axioms}\}$.
「群とは群の公理のモデルのこと」と考えてよい．

$T \models \varphi$

Definition 34

$\forall \mathfrak{A} \models T\ (\mathfrak{A} \models \varphi)$ であるとき，これを $T \models \varphi$ と書く．

Example

任意の群について単位元は一意なので
$\{\text{group axioms}\} \models$ “uniqueness of identity”.

完全性定理

“$\vdash$” と “$\models$”，つまり構文論と意味論をつなぐ定理が一階述語論理の完全性定理である．

Theorem 35 (Gödel 1930)

T を $\mathcal{L}$ の理論，φ を $\mathcal{L}$ 文とする．このとき，

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow T \models \varphi$$

である．

“$\rightarrow$”，つまり「証明できることは正しい」を健全性といい，
“$\leftarrow$”，つまり「正しいことは証明できる」を完全性という．

参考文献

- K.Kunen, *Set Theory*, Collage Publications, 2011.
- 菊池誠, 『不完全性定理』, 共立出版, 2014.
- 田中一之ら, 『ゲーデルと 20 世紀の論理学 4 集合論とプラトニズム』, 東京大学出版会, 2007.
- 渕野昌, 「Forcing 入門」, http://fuchino.ddo.jp/kobe/forcing-LN-2015.pdf

ご清聴ありがとうございました！このスライドは

http://elecello.com/

にあります.