今日のゼミの補足資料

近藤 友祐 (神戸大学数学研究会 POMB 数理論理学班)

2016 年 6 月 29 日

担当範囲，cut 除去定理と完全性定理とかいうクソ重要な定理の証明がなかったので，今日は後者をやります．cut 除去誰かやっちくり～．また，Hilbert 流を対象とします．教科書は LK ですが，気にしたら負けです．

記号は適当に使うので適当に読んでください．特に注意すべき略記として，“$\varphi = \varphi(v_0)$” は．“φ は変数記号として v_0 のみを持つ 1 変数論理式である” という日本語の略記であり，“$\varphi = \varphi(v_0)$” という文字列自体を表しているのではありません．等号は結構濫用するので気を付けてください．また，メタな forall を $^\forall$，対象レベルの forall を $\forall$ と書いて区別します．exists も同様です．とはいえ，メタな forall はしばしば省略したりしています．そのへんも適当です．

以下の定理 0 は証明しませんが，本質的に用いられます．

定理 0（Zorn の補題） $\langle A; \leq \rangle$ を，$(*)$ を満たすような半順序集合とする：

$(*)$ A の任意の全順序部分集合 C が A に上界を持つ．つまり，$^\forall C \subseteq A$: 全順序 $^\exists b \in A\ ^\forall x \in C\ x \leq b$.

このとき，任意の $a \in A$ に対し A の極大元 b であって $a \leq b$ となるものが存在する． □

以下は今日示される定理群のリストです．適宜参照してください．

定理 1（完全性定理たち） $T \subseteq \mathrm{Sent}_\mathcal{L}, \varphi \in \mathrm{Sent}_\mathcal{L}$ とする．このとき (1)(2) が成り立つ．

(1) T は無矛盾である $\Leftrightarrow$ T はモデルを持つ．

(2) $T \models \varphi \Leftrightarrow T \vdash \varphi$. □

今日のメインは (1) の $(\Rightarrow)$ を示すことです．以下，系 19 まで $T \subseteq \mathrm{Sent}_\mathcal{L}$ が無矛盾であることを常に仮定し，イチイチことわりません．

定義 2 (1) $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$.

(2) $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{L}_i \cup \mathcal{C}_i$.　但し $\mathcal{C}_i = \{c_\varphi : \varphi \in F_i\}$, $F_i = \{\varphi \in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_i} : \varphi = \varphi(v_0)\}$.

(3) $\mathcal{C} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_i$. □

補題 3 $\varphi = \varphi(v_0) \in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L} \cup \mathcal{C}} \Rightarrow c_\varphi \in \mathcal{C}$. □

定義 4 (1) $\varphi = \varphi(v_0) \in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L} \cup \mathcal{C}}$ に対し $\varphi_H = \exists v_0 \varphi(v_0) \to \varphi(c_\varphi)$ と定める．

(2) $H = \{\varphi_H \in \mathrm{Sent}_{\mathcal{L} \cup \mathcal{C}} : \varphi = \varphi(v_0) \in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L} \cup \mathcal{C}}\}$.

(3) $T \cup H \subseteq \mathrm{Sent}_{\mathcal{L} \cup \mathcal{C}}$ を T の Henkin 拡大という． □

補題 5 $U \subseteq \mathrm{Sent}_{\mathcal{L} \cup \mathcal{C}}$ を $T \cup H$ の拡大とし，$\varphi = \varphi(v_0) \in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L} \cup \mathcal{C}}$ とする．このとき，
$U \vdash \exists v_0 \varphi(v_0) \Leftrightarrow U \vdash \varphi(c_\varphi)$. □

補題 6 $\varphi = \varphi(v_0), \psi \in \mathrm{Fml}_\mathcal{L}$ とする．このとき，$T + \varphi_H \vdash \psi \Rightarrow T \vdash \psi$ □

補題 7 $\psi \in \mathrm{Fml}_\mathcal{L}$ とする．このとき，$T \cup H \vdash \psi \Rightarrow T \vdash \psi$ □

補題 8 $\mathcal{L}_A \subseteq \mathcal{L}_B$ とし，$T_B \subseteq \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_B}$ が $T_A \subseteq \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_A}$ の保存的拡大であるとする．このとき，T_A が無矛盾ならば T_B も無矛盾である． □

補題 9 $T \cup H$ は無矛盾である． □

定理 10 $T \cup H$ を部分集合として含むような極大無矛盾な理論 $U \subseteq \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}\cup\mathcal{C}}$ が存在する．ここで，U が極大無矛盾であるとは，U 自身が無矛盾であり，かつ，$U \subsetneqq V$ なる無矛盾な理論 $V \subseteq \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}\cup\mathcal{C}}$ が存在しないことをいう． □

補題 11 任意の $\varphi \in \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}\cup\mathcal{C}}$ に対して，$\varphi \in U$ か $\neg\varphi \in U$ のどちらか一方のみが成り立つ． □

補題 12 $\varphi \in \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}}$ とする．このとき，$T \nvdash \varphi$ ならば $T + \neg\varphi$ は無矛盾である． □

補題 13 $\varphi = \varphi(x) \in \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}\cup\mathcal{C}}$ とする．このとき，$\exists x\varphi(x) \in U \Rightarrow {}^{\exists}c \in \mathcal{C}\ \varphi(c) \in U$． □

定義 14 $\mathcal{L}\cup\mathcal{C}$ 構造 $\mathfrak{A}'$ を $\mathfrak{A}' = \langle A', I\rangle$ で定義する．ただし，

- $A' = \mathrm{ClTerm}_{\mathcal{L}\cup\mathcal{C}}/\sim$，ここで $t \sim u \Leftrightarrow t = u \in U$．
- $c \in \mathcal{L}\cup\mathcal{C}$ に対し，$c^{\mathfrak{A}'} = [c]\ (= \{d \in \mathrm{ClTerm}_{\mathcal{L}\cup\mathcal{C}} : d \sim c\})$．
- $f \in \mathcal{L}$ に対し，$f^{\mathfrak{A}'}([t_1], \ldots, [t_n]) = [t] \iff f(t_1, \ldots, t_n) = t \in U$．
- $R \in \mathcal{L}$ に対し，$R^{\mathfrak{A}'} = \{([t_1], \ldots, [t_n]) \in \mathfrak{A}'^n : R(t_1, \ldots, t_n) \in U\}$． □

補題 15 定義 14 は well-defined. □

補題 16 ${}^{\forall}t \in \mathrm{ClTerm}_{\mathcal{L}\cup\mathcal{C}}\ {}^{\exists}c \in \mathcal{C}\quad [t] = [c]$. つまり，同値類の代表元は $\mathcal{C}$ の元から取ることができる． □

補題 17 $\varphi \in \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}\cup\mathcal{C}}$ とする．このとき，$\varphi \in U \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \models \varphi$. □

補題 18 $\mathfrak{A}' \models T$. □

系 19（強い形の完全性定理 (p.84, 定理 2.10)） T はモデルを持つ． □

ここまでで定理 1(1) の ($\Rightarrow$) が示された．以下では $\mathcal{L}$ を言語，$T \subseteq \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}}$ とし，無矛盾性は特に仮定しない．

定理 20（完全性定理） $\varphi \in \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}}$ とする．このとき，$T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$. □

補題 21（健全性定理） $\varphi \in \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}}$ とする．このとき，$T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$. □

定理 22（強い形の健全性定理 (p.84, 定理 2.9)） T がモデルを持つならば T は無矛盾である． □

定理 23（コンパクト性定理 (p.85, 定理 2.11)） T がモデルを持つことと，T の任意の有限部分集合がモデルを持つことは同値である． □

参考文献

[1] 小野寛晰，『情報数学セミナー–情報科学における論理』，日本評論社，1994 年.

[2] 菊池誠，『不完全性定理』，共立出版，2014 年.

[3] 坪井明人，「完全性定理」，`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tsuboi/gra/complete.pdf`.