数学基礎論への招待

近藤 友祐 (@elecello_)
神戸大学工学部電気電子工学科 2 年，元旭丘高校 66 期 (幽霊) 物理同好会員

2016 年 3 月 19 日

微分積分学が急速に発達していく中で，無限や極限の概念を感覚的に扱うのではなく，厳密な数学的な基礎付けを与えようという動きがあった．そこで重要な役割を果たしたのが集合論である．

集合論の上で大部分の数学が展開できる．例えば，各自然数はそれ自体が集合であると考えられる．$0 = \emptyset, S(n) = n + 1 = n \cup \{n\}$ と定義してやれば，$0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$ と次々に作れる*1．このように頑張っていけば $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ は作れるし，その上の関係や函数の概念も集合論的に定義され，あらゆる数学的存在は集合として定義しなおせる．集合論最強説である．

しかし，集合概念を素朴に扱う限り (i.e. 内包公理図式「$\varphi(x)$ を x についての性質とする．このとき集合 $\{x : \varphi(x)\}$ が存在する」を無制限に認める限り)，集合論からは様々な逆理が生じることがわかってきた*2．その代表例が Russell の逆理である．

逆理 1. 内包公理により集合 $R = \{x : x \notin x\}$ が存在する．このとき，$R \in R \iff R \notin R$ となり矛盾する．

これを契機に，数学の基礎付けに関する大論争が勃発する*3．それ以降，論理や集合に関する研究が爆発的に進み，数学基礎論と呼ばれている一大分野として遺されている．現在では数学の基礎付けという哲学的な文脈から比較的離れ，「普通の数学」としての数理論理学も活発に研究されている．

以下の議論では，選択公理を含む ZFC の公理をすべて仮定する．

1 命題論理と述語論理の構文論と意味論

数学基礎論の最大の特徴は「数学を数学する」ことである．数学そのものを数学的対象とするために，「命題」「定理」「証明」などの概念を扱える形式言語を定める．この形式言語に対して 2 種類のアプローチがある．ひとつは，形式的証明可能性を議論する「構文論」，もうひとつはモデルや真偽について議論する「意味論」である．

1.1 命題論理の構文論

まず，命題の概念を形式化する．数学的命題は，原始的命題を命題結合子で結合したものと考えられる．「命題・原始的命題・命題結合子」の形式言語における対応物がそれぞれ「論理式・命題変数・論理結合子」である．

定義 2. $PV = \{A, B, C, \ldots\}$ を可算無限個の文字の集合とする．PV の元を**命題変数**という．

定義 3. **論理式**は，以下 *(1)-(4)* で再帰的に定義される有限記号列である．

(1) 命題変数一文字からなる記号列は論理式である．

---

*1 0 は自然数である．

*2 そもそも，「集合とはものの集まりである」とか「x についての性質」というときの「もの」「性質」とは何なのかハッキリしないし，このままでは数学的定義として不十分であることは明らかだろう．

*3 論理主義，形式主義，直観主義などのキーワードでいろいろ調べてみてください．

(2) 記号列 φ が論理式ならば，記号列 $(\neg\varphi)$ も論理式である．

(3) 記号列 φ, ψ が論理式ならば，記号列 $(\varphi \to \psi)$ も論理式である．

(4) 以上で定まる記号列のみが論理式である[*4]．

普通に書くとカッコが増えて見づらいので，カッコは適当に省略する．論理結合子 $\neg, \to$ は命題結合子「でない」「ならば」を意図したものではあるが，こうして定義される論理式は「意味など持たないただの記号列」であることに注意しよう．また，$\vee, \wedge, \leftrightarrow$ を使った論理式は，$\neg, \to$ のみを使って書ける正式な論理式の単なる略記法として定義される．

続いて証明の概念を形式化する．証明とは，自明と認められる命題といくつかの仮定から出発し，正しい前提からは必ず正しい結論を導く推論を用いて展開される**有限な**論理の流れのことである．「自明な命題・仮定・推論」の形式言語における対応物がそれぞれ「論理的公理・理論・推論規則」である．

定義 4. **論理的公理**とは，*(1)-(3)* のいずれか形をした論理式のことである．ただし，φ, ψ, γ には任意の論理式が入る．

(1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.

(2) $(\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \gamma))$.

(3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$.

定義 5. 論理式の集合を**理論**という．

定義 6. 理論 Γ からの論理式 φ の**形式的証明**とは，論理式の有限列 $\langle \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n (= \varphi) \rangle$ であって，各 $i (0 \leq i \leq n)$ について以下のいずれかが成り立っているものである．

(1) φ_i は論理的公理である．

(2) $\varphi_i \in \Gamma$.

(3) φ_i は $\varphi_j, \varphi_k\,(j, k < i)$ から MP で得られる．ただし，MP とは，2 つの論理式 ψ と $\psi \to \rho$ から ρ を得る**推論規則**のことである．

定義 7. 理論 Γ からの論理式 φ の形式的証明が存在するとき，φ は Γ の**形式的定理**であるといい[*5]，$\Gamma \vdash \varphi$ と書く．特に，$\emptyset \vdash \varphi$ を $\vdash \varphi$ と略記する．

例 8. $\vdash A \to A$.

以上で議論した形式体系は，Hilbert 流と呼ばれるものである．[*6]．

1.2 命題論理の意味論

構文論において，論理式は単なる記号列であり，意味もクソもなかった．ここに意味を与えるのが意味論である．命題論理においては，論理式の意味とは真理値 (T か F) のことであるとされている．

定義 9. 函数 $v : PV \to \{T, F\}$ を**付値**という．

付値を 1 つ固定すると，ブール代数の計算を使ってその定義域を論理式全体の集合 Fml に自然に拡張でき

[*4] 再帰的定義においてはこのような条件が付随することが多く，そのことを暗黙の了解として省略して書くことも多いので注意．

[*5] 形式的証明や形式的定理を略して単に証明とか定理とか言ったりもする．しかしこの語法では，数学を数学する立場での証明や定理と紛らわしい．

[*6] 形式体系には他にも色々あり，その中でも自然演繹が有名．Hilbert 流は「公理多・推論規則少」，自然演繹は「公理少，推論規則多」の体系と考えられる．形式的体系についての定理を証明したいときに (まさに「数学を数学する」ことである！) 帰納法を回す際，推論規則で場合分けすることがよくある．このことを考えると，推論規則が少ない Hilbert 流は証明が楽でよい．しかし，公理の不自然さや $A \to A$ の形式的証明の複雑さを見れば明らかなように，Hilbert 流は「数学をすること」に向いている体系とは言えないだろう．

る．例えば，$v(A) = F, v(B) = T$ なら，$v(\neg A) = T$, $v(A \wedge B) = F$, $v(A \vee B) = T$, $v(A \to B) = T$ など．このことはきちんと議論すべきだが，ここでは省略する．

定義 10. 論理式 φ と付値 v に対して，$v(\varphi) = T$ を $v \models \varphi$ と書く．理論 Γ と付値 v に対して，すべての $\varphi \in \Gamma$ について $v \models \varphi$ であるとき，$v \models \Gamma$ と書き，v は Γ の**モデル**であるという．

例 11. $\Gamma = \{A, A \to B\}$ とする．$v(A) = T$ かつ $v(B) = T$ であるような付値はすべて Γ のモデルである．$C, D, \ldots$ はどこに飛ばしてもかまわない．

定義 12. Γ を理論，φ を論理式とする．Γ の任意のモデル v について $v \models \varphi$ であるとき，$\Gamma \models \varphi$ と書く．

1.3 完全性定理

ここまでで，構文論の概念 $\Gamma \vdash \varphi$ と意味論の概念 $\Gamma \models \varphi$ を定義した．大雑把に言って，前者は「証明可能性」について，後者は「真偽」についての言明だが，これらが同値であることを主張するのが命題論理の完全性定理である．

定理 13. Γ を理論，φ を論理式とする．このとき，$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi$ である．

1.4 述語論理

(一階) 述語論理は，命題論理の枠組みに等号と「任意の対象について…」「…という対象が存在する」という量化子を加え，そして非論理的記号と呼ばれる定数記号，関係記号，函数記号を扱えるようにした枠組みである．この述語論理にも構文論と意味論が定義され (複雑)，完全性定理が成り立つ*7．

現在の数学は，述語論理の上で展開される．その中でも重要なのが言語 $\mathcal{L}_S = \{\in\}$ で書かれる公理系 ZFC で展開される公理的集合論である．

2 集合論から

この章では，集合のサイズを測る概念である基数について紹介した後，連続体仮説について触れる．

2.1 単射で集合のサイズを比べる

2 つの集合のサイズを比較するために，単射や全単射の概念を用いる*8．

定義 14. 集合 X, Y について，単射 $X \to Y$ がある時，$X \preccurlyeq Y$ と書く．全単射 $X \to Y$ がある時，$X \approx Y$ と書く．$X \prec Y$ は $X \preccurlyeq Y \wedge X \not\approx Y$ の略記である．

有限集合では「(真の) 部分は全体よりも小」が成り立つが，無限集合では事情が異なる．例えば，正の偶数全体の集合を $\mathbb{E}$ とすれば，$\mathbb{E} \subsetneq \mathbb{N}$ なのに $\mathbb{E} \approx \mathbb{N}$ である．もっと言えば $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$ なんてことも言える．

既存の集合に対し，それより大きい集合を作るにはどうしたらよいか？「1 つ新しい元を付け足せば大きくのでは？」と思われるかもしれないが，例えば $\mathbb{N}$ に新たな元 -1 を加えて $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \cup \{-1\}$ を作ったところで，全単射 $f : \mathbb{N}' \ni x \mapsto x + 1 \in \mathbb{N}$ があるので $\mathbb{N}' \approx \mathbb{N}$ となってしまう．無限集合に対しては 1 つ付け加える程度では本質的に違いを生まない．しかし，冪集合をとる操作は本質的に大きい集合を生む (Cantor の定理)．

定理 15. 任意の集合 A に対し，$A \prec \mathcal{P}(A)$.

*7 しかし，二階以上の述語論理では完全性定理が成り立たないらしい．
*8 高校生相手だけれども，これらの予備知識は仮定する．

2.2　基数

2 本の棒の長さを相対的に比べたければそれを並べてみればよい．しかし，メートル法に基づいたものさしがあれば，絶対的な長さが得られる．同じように，集合のサイズを相対的に比べたければ単射や全単射があるか調べればよい．しかし，集合のサイズを測るものさしがあれば，絶対的な大きさが得られる．この「集合のサイズを測るものさし」が基数の概念である．

基数を正確に定義するためには順序数を定義しなければならないし，順序数を正確に定義するためには推移的集合や整列関係について正確に定義しなければならない．これをイチからやるには紙面も時間も割くのでやらないが，一応下に定義しておく．ただし，ギリシア文字は常に順序数を表す．

定義 16. 集合 z が**順序数**であるとは，z が推移的集合で，かつ，z が $\in$ により整列されることである．

定義 17. 順序数 κ が**基数**であるとは，$\alpha \in \kappa$ なる任意の α に対して $\alpha \prec \kappa$ が成り立つことである．

例えば，この稿の冒頭に定義した自然数はすべて基数である (有限基数)．また，$\mathbb{N}$ は基数である．$\mathbb{N}$ という文字は滅多に使われず，順序数であることを強調するときは ω，基数であることを強調するときは $\aleph_0$ を使う (実体としては $\mathbb{N} = \omega = \aleph_0$)．

詳細は省略するが，整礎関係に対する超限帰納法を用いて，どんな基数に対してもそれより真に大きい基数の中で最小のものが存在することがわかる．すなわち，どんな基数 κ に対しても $\kappa^+ = \min\{\lambda : \kappa < \lambda \wedge \lambda$は基数$\}$ が存在する．

定義 18. $\aleph_1 = \aleph_0^+$ と定義する．

整列可能な集合 A に対し，$A \approx \alpha$ なる順序数 α で最小のものを $|A|$ と書く．選択公理のもとではすべての集合は整列可能なので，どんな A に対しても $|A|$ が定義される．これは基数であることもわかる．また，$A \prec B \leftrightarrow |A| < |B|$ や $A \approx B \leftrightarrow |A| = |B|$ であることが導ける．

定義 19. ω から $2(= \{0,1\})$ への函数全体の集合を ${}^{\omega}2$ と書く．$2^{\aleph_0} = |{}^{\omega}2|$ と定義する．

Cantor の定理から $\omega \prec \mathcal{P}(\omega)$ であり，また，少し考えればわかるように $\mathcal{P}(\omega) \approx {}^{\omega}2$ である．したがって上の注意から $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ が成り立つ．ちなみに，$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ である．

さて，$2^{\aleph_0}$ は $\aleph_0$ より真に大きい．では，$2^{\aleph_0}$ は $\aleph_0$ より真に大きい基数のうち最小のものだろうか？つまり，$2^{\aleph_0} = \aleph_1$ だろうか？ Cantor はそうであると予想したが証明できなかった．この仮説を**連続体仮説** (CH) という[*9]．これに対し，驚くべき解決が得られた[*10]．

定理 20.

(1) ZFC が無矛盾ならば，ZFC + CH も無矛盾である．
(2) ZFC が無矛盾ならば，ZFC + ¬CH も無矛盾である．

今は，この 2 つの定理の証明を理解すべく勉強を進めています (勉強しているとは言ってない)．

参考文献

[1] 菊池誠，『不完全性定理』，共立出版，2014．

[2] K.Kunen, *Set Theory*, Collage Publications, 2011.

---

*9 平たく言いなおすと次のようになる:「$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ であることは Cantor の定理から明らかであるが，その中間のサイズの無限はない．つまり，$|\mathbb{N}| < \kappa < |\mathbb{R}|$ なる基数 κ はない．」

*10 (1) は Gödel 1940,(2) は Cohen 1963．実際はもっと一般的な結果を証明している．