集合論の初歩

平成 27 年度 POMB 最終報告会

近藤 友祐

神戸大学工学部電気電子工学科 2 年, 学生団体 POMB

February 22, 2016

ご案内

このスライドは

http://elecello.com/

にあります.

内容

1. 第 1 部：素朴集合論と公理的集合論
   - 素朴集合論上の数学の展開
   - 公理的集合論
2. 第 2 部：順序数と基数
   - 順序数
   - 基数

「基礎」の 2 つの意味

「集合論は数学の基礎である」とはよく言われるが,
これには全く異なる 2 つの意味合いがある.

- 集合論は最低限の数学リテラシーである.
- 集合論によって数学が基礎づけられる.

前者は数学科には必ずある「集合と位相」の講義に対応する.
これから取り扱おうとしている話題は後者である.
無限の操作を必要とする解析学には正当化が必要であった.

"Set theory is the theory of EVERYTHING"

普通の数学の立場では，

- 「3」とは，「みっつ」のことである．
- 函数 $f : X \to Y$ とは，「対応」$X \ni x \mapsto y \in Y$ のことである．

と考える．大体それで間に合うので，それ以上は考えない．
集合論では，

- 数学で現れるあらゆる存在 (「数」「函数」「関係」など) は集合である．

という立場に立つ．

順序対

順序対 (ordered pair) とは，座標平面の点 (x, y) のように順序まで考慮したペアのこと．

Definition 1 (Kuratowski)

$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Lemma 2

$(x, y) = (x', y') \to x = x' \land y = y'$.

Proof

$x = y$ と $x \neq y$ で場合分け. $\square$

二項関係，函数

Definition 3

R が関係である $\leftrightarrow \forall u \in R \exists x, y[u = (x, y)]$.

Definition 4

f が函数である
$\leftrightarrow$ f が関係であり，$(x, y) \in f$ なる y は高々1 つしかない.

自然数

- $0 := \emptyset$
- $1 := \{0\} = \{\emptyset\}$
- $2 := \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $3 := \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

  $\vdots$
- $n := \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$

  $\vdots$

整数・有理数・実数・複素数

一旦 $\mathbb{N}$ が出来れば，$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ も構成できる．

- 細かいことを抜きにすれば，有理数は「符号」「分子」「分母」を表す 3 つの自然数で書ける．
- 負の整数は符号を 1(マイナス)，分母を 1 とすれば得られる．
- 実数は有理数の切断で得られる．
- 複素数は実数の順序対として得られる．
- それらの上の大小や四則演算も集合論的に定義される．

詳しいことは [Kunen 2009] や [坪郷 1967] 等を参照されたい．

2 つの原理

ここまで，集合概念は既知のものとしてあいまいに扱ってきた．
集合概念について整理すると，次の 2 つの公理が浮かび上がる．

- 外延性の公理：要素が相等しい集合は相等しい．
- 内包の公理：$\varphi(x)$ を x に関する性質とするとき，集合 $\{x : \varphi(x)\}$ が存在する．

これらは，集合概念に要請されるきわめて自然な原理に思える．
しかし，この立場に立つと Russell のパラドクスや Burali-Forti のパラドクスのような矛盾が起きてしまう．

公理的集合論

- 内包の公理は矛盾を導くので，新たな公理系が必要．
  →ZFC 公理系と呼ばれる公理系が標準的．
- 現代では，数学を一階述語論理というシステムの上で形式的に取り扱うことが標準的になっている．以下で導かれる補題や定理，その証明は，集合論の言語 $\mathcal{L}_S = \{\in\}$ の枠組みで形式化されるが，今日はそのことをあまり意識せずに議論を進める．

集合論の形式化

- 集合論の形式化について平たく説明する．$\mathcal{L}_S$ 論理式 (formula) とは，ある規則を満たす記号の有限列であり，使用される記号は $\neg, \to, \forall, =, \in, (,), v_0, v_1, v_2, \ldots$ のみである．証明 (proof) とは，ある規則を満たす $\mathcal{L}_S$ 論理式の有限列である．定理 (theorem) とは，証明の末尾に現れる $\mathcal{L}_S$ 論理式のことである．非論理的公理 (non-logical axioms) とは，いくつかの特定の $\mathcal{L}_S$ 論理式のことである．ここで指定するのが ZFC の公理である．
- 集合論の議論で現れる記号は以上に挙げたもののみであるから，$\exists x, s \subseteq t, f(x) = y$ 等々の記法は略記にすぎず，原理的には一切略記を用いず書けることに注意されたい．以下では，特に断らず略記を用いる．

ZFC の公理 Part 1

今後，論理式の全称化は省略していることが多いので注意．

0. 集合の存在公理：$\exists x(x = x)$.
1. 外延性公理：$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y$.
2. 基礎の公理：$\exists y(y \in x) \to \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in x \wedge z \in y))$.
3. 分出公理図式：y を自由変数に持たない $\mathcal{L}_S$ 論理式 φ それぞれに対して，$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi(x))$.
4. 対公理：$\exists z(x \in z \wedge y \in z)$.
5. 和集合公理：$\exists A \forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \to x \in A)$.
6. 置換公理図式：B を自由変数に持たない $\mathcal{L}_S$ 論理式 φ それぞれに対して，$\forall x \in A \exists ! y \varphi(x, y) \to \exists B \forall x \in A \exists y \in B \varphi(x, y)$.

ZFC の公理 Part 2

7. 無限公理：$\exists x(\emptyset \in x \land \forall y \in x(S(y) \in x))$,
   但し $S(y) := y \cup \{y\}$.
8. 冪集合公理：$\exists y \forall z(z \subseteq x \to z \in y)$.
9. 選択公理：
   $\emptyset \notin F \land \forall x \in F \forall y \in F(x \neq y \to x \cap y = \emptyset)$
   $\to \exists C \forall x \in F(\mathrm{SING}(C \cap x))$,
   但し $\mathrm{SING}(x) \leftrightarrow \exists y \in x \forall z \in x(z = y)$.

以上の公理によって存在が示されるものが「集合」と呼ばれるが，ある意味で「集合とはなにか」という根本的な問いには答えていないとも言える．

基本的な概念の正当化

上記の公理系から，x, y が集合ならば

- $x \cap y$ や $x \cup y$ も集合．
- $\{x\}$ も集合．
- $\{x, y\}$ も集合．
- $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ も集合．
- 空集合の存在と一意性．
- $0, 1, 2, \ldots$ はそれぞれ集合．

など，基本的なことが比較的容易に導けるので，このようなことは断りなく用いる．

分出公理図式とクラス

- 分出公理図式は，既存の集合 z から $\varphi(x)$ を満たす部分を「切り取った」ものが集合であることを主張している．
- すなわち，$\{x : \varphi(x)\}$ が集合かどうかはわからないが，$\{x \in z : \varphi(x)\}$ は集合であるといえる．

Definition 5

$\{x : \varphi(x)\}$ をクラス (class) という．$y \in \{x : \varphi(x)\}$ は $\varphi(y)$ の略記である．
$\forall x(x \in A \leftrightarrow \varphi(x))$ なる集合 A があるとき，$\{x : \varphi(x)\}$ は存在するという．そうでないとき，$\{x : \varphi(x)\}$ は真のクラスであるという．

例えば,「Russell のパラドクスにおける $R = \{x : x \notin x\}$」「集合全体の集まり $V = \{x : x = x\}$」「順序数全体の集まり ON」はすべて真のクラスであることが知られている．

第 1 部の補足

これまでは「数学の基礎」としての集合論を強調したが，それは集合論のほんの一面でしかない．集合論はいまや一つの独立した研究領域であり，種々の華々しい成果が得られている．
例えば，通常の数学の手法では真偽が定まらない命題 (ex. 連続体仮説) に対してアプローチする方法を与える強制法 (forcing) などが有名．

順序数

順序数とは,

- 自然数概念のある種の拡張.
- 集合論において中心的な役割を果たす重要な概念.

基数とは,

- 集合のサイズを測るための概念.
- その実体は順序数.

狭義全順序

Definition 6

R を関係，A を集合とする．以下の 3 つすべてが成り立つとき，R を A 上の狭義全順序 (strict total order)，単に全順序ともいう．

1. 非反射律：$\forall x \in A\,[x \not R x]$.
2. 推移律：$\forall xyz \in A\,[xRyRz \to xRz]$.
3. 三分律：$\forall xy \in A\,[xRy \vee yRx \vee x = y]$.

イメージ：$\mathbb{R}$ 上の狭義大小関係 $<$ や，広辞苑の単語の集合 W 上に「$a \lhd b \leftrightarrow a$ は b より手前に現れる」で定義する順序 $\lhd$ など，「直線状にまっすぐ並んだ順序」．
全順序は線型順序 (linear order) とも呼ばれる．

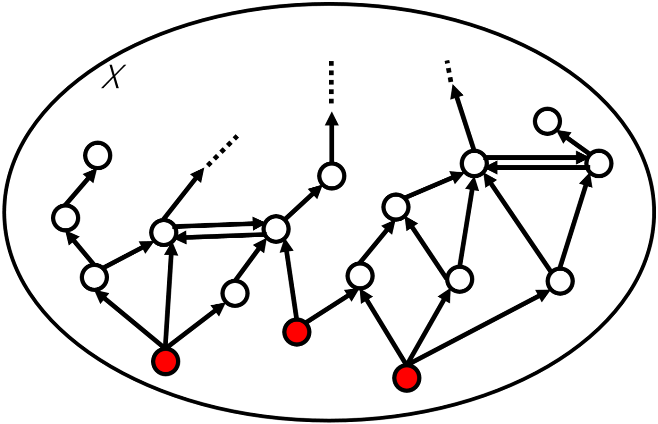
極小元

Definition 7

R を関係，X を集合，$y \in X$ とする．$\forall z \in X\, [z \not R\, y]$ であるとき，y は X における R 極小元 (R-minimal) であるという．

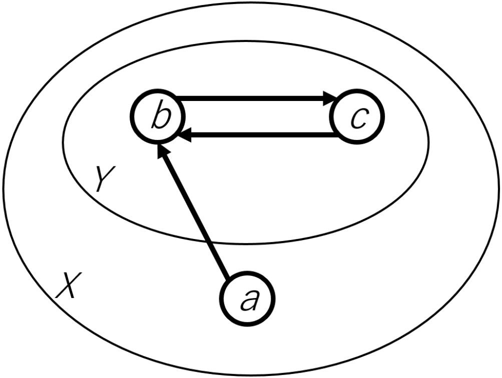
極小元のイメージ Part 1

aRb を $a \longrightarrow b$ と表す.
赤丸が X における R 極小元.



極小元のイメージ Part 2

Y には R 極小元がないが，
X にはあり， a である．



整礎関係，整列順序

Definition 8

R を関係，A を集合とする．A の任意の空でない部分集合が R 極小元を持つとき，R は A 上で整礎 (well-founded) であるという．

Definition 9

R を関係，A を集合とする．R が A 上の全順序であり，かつ，A 上の整礎関係であるとき，R は A を整列する (R well-orders A) という．

R が A 上の整列順序であるとき，$X \subseteq A$ の R 極小元は唯一であり，R 最小元 (least element) と呼ばれる．
informal な例：$\mathbb{N}$ は通常の大小 $<$ によって整列されるが，
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ はそうではない (Why?)．

推移的集合

Definition 10

集合 z が推移的集合 (transitive set) であるとは，$\forall y \in z\,[y \subseteq z]$ を満たすことである．また，

$$\forall xy\,[x \in y \in z \to x \in z]$$

で定義しても同値である．

Remark

「R が推移的関係である」ことと「z が推移的集合である」ことを定義する式は似ているが，区別しなければならない．

$\emptyset$ や 3 や $\{0, 1, \{1\}\}$ などは推移的集合だが，$\{0, 1, \{2\}\}$ などは違う．

順序数の定義

Definition 11 (von Neumann)

z が順序数 (ordinal number) であるとは，z が推移的集合であり，かつ，$\in$ によって整列されることである．

Definition 12

- $ON := \{x : x \text{ is an ordinal number}\}$.
- 順序数を表すのにギリシア文字を用いる．
- $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta$.
- $\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$.
- $X \subseteq ON, X \cap ON$ など，ラフな略記を用いる．

"関係" $\in$ についての注意

Remark

これまで説明してきた関係はそれ自体が順序対の集合であったが，$\in$ は集合ではない (i.e.$E = \{(x, y) : x \in y\}$ なる集合は存在しない) ので注意が必要.
例えば,「(順序対の集合としての関係)R が集合 A 上非反射である」というのは，ちゃんと書けば

$$\forall x \in A \neg((x, x) \in R)$$

ということだった．対して,「$\in$ が集合 A 上非反射である」というのは

$$\forall x \in A \neg(x \in x)$$

ということ．詳しくは [Kunen 2011] を参照.

ON のイメージ

$$
\begin{array}{ll}
\vdots & \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \\
\bullet & \omega\verb|^|2 \\
\vdots & \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \\
\bullet & \omega 2=\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ,\omega,\ \omega+1,\ \ldots\} \\
\vdots & \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \\
\bullet & \omega+2=\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \omega,\ \omega+1\} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \\
\bullet & \omega+1=\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \omega\} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \\
\bullet & \omega=\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\} \\
\vdots & \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \\
\bullet & 2=\{0,\ 1\} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \\
\bullet & 1=\{0\} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \\
\bullet & 0=\varnothing
\end{array}
$$

ON は推移的クラス

Lemma 13

ON は推移的クラスである．すなわち，$z \in \alpha \in ON \to z \in ON$.

Proof

$z \in \alpha \in ON$ を仮定して，z が推移的集合であることと z が $\in$ で整列されることを示せばよい．前半は，α が推移的集合であることと $\in$ が α 上の推移律を満たすことから導ける．後半は，α が推移的集合であることより $z \subseteq \alpha$ がわかり，$\in$ が α 上の整列順序であることから明らか (整列集合の部分集合は整列集合). $\square$

$\in$ は ON 上非反射

Lemma 14

$\in$ は ON 上非反射である．すなわち，$\alpha \notin \alpha$.

Proof

背理法．α を，$\alpha \in \alpha$ なる順序数とする．α は順序数なので $\in$ は α 上非反射．よって $\forall y\,[y \in \alpha \to y \notin y]$. 特に y を α とおけば，$\alpha \in \alpha \to \alpha \notin \alpha$. これと仮定 $\alpha \in \alpha$ より $\alpha \notin \alpha$. 矛盾． $\square$

$\in$ は ON 上推移的

Lemma 15

$\in$ は ON 上推移的である．すなわち，$\alpha \in \beta \in \gamma \to \alpha \in \gamma$.

Proof

γ が推移的集合であることから明らか. $\square$

三分律への準備

Lemma 16

$\alpha \cap \beta$ は順序数である.

Proof

推移的集合であることは少し考えればわかる．整列性は $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$ から明らか. □

Lemma 17

$\alpha \subseteq \beta \leftrightarrow \alpha \leq \beta$（つまり $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$）.

Proof

$(\leftarrow)$ と，$\alpha = \beta$ のときの $(\rightarrow)$ は自明．$(\rightarrow)$ で $\alpha \subsetneq \beta$ のとき，$\beta \setminus \alpha$ の最小元 ξ が α に等しいことを背理法で示せる (面倒)．そうすれば $\alpha \in \beta$ がわかる. □

$\in$ は ON 上三分律を満たす

Lemma 18

$\in$ は ON 上三分律を満たす．すなわち，$\alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha \vee \alpha = \beta$.

Proof

$\delta := \alpha \cap \beta$ を考えると，Lemma 16 より δ も順序数．$\delta \subseteq \alpha, \beta$ と Lemma 17 より $(\delta \in \alpha \vee \delta = \alpha) \wedge (\delta \in \beta \vee \delta = \beta)$．四通りで場合分けすると，$\delta \in \alpha, \beta$ は Lemma 14 からあり得ないことがわかり，その他の場合なら $\alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha \vee \alpha = \beta$ であることがわかる．$\square$

$\in$ は ON 上の整礎関係

Lemma 19

$\in$ は ON 上の整礎関係である．すなわち，ON の任意の空でない部分集合は $\in$ 極小元を持つ．

Proof

$X \neq \emptyset$ を ON の部分集合とする．X は空でないので $\alpha \in X$ がとれる．α が X の極小元なら補題は明らか．そうでないとき，集合 $\alpha \cap X$ を考える．これは α の空でない (証略) 部分集合なので，α の整列性より $\alpha \cap X$ には $\in$ 極小元 ξ がある．この ξ はまた X における $\in$ 極小元でもある (証略). $\square$

ちなみに,「部分集合」を「部分クラス」に置き換えた補題も成り立つ．詳細は [Kunen 2011] など.

$\in$ は ON 上の整列順序

Theorem 20

$\in$ は ON を整列する.

Proof

全順序性は Lemma 14,15,18. 整礎性は Lemma 19. $\square$

Burali-Forti の定理

Theorem 21 (Burali-Forti の定理)

順序数全体からなるクラス ON は真のクラスである．

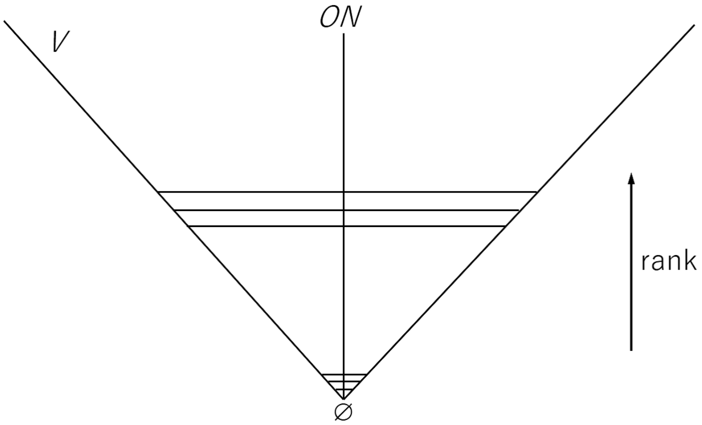
Proof

背理法．もしもそのような集合 ON があったとすると，Lemma 13 より ON は推移的 集合 であり，かつ，Theorem 20 より ON は $\in$ による整列 集合 である．したがって ON は順序数である ($ON \in ON$)．これは Lemma 14 に反する． $\square$

順序数の役割

- 集合のサイズを測る基数の概念を素朴に「集合全体の集まり V を，全単射があるという同値関係 $\approx$ で割って」定義しようと思うと，集合でない V が関わってきて問題である．公理的集合論では基数を「ある条件を満たす順序数」という形で定義できる．
- 順序数は，集合論の宇宙の「背骨」あたる (累積的階層).
- etc.

累積的階層



基数の定義

Definition 22

- 単射 $X \to Y$ がある時，$X \preccurlyeq Y$ と書く．
- 全単射 $X \to Y$ がある時，$X \approx Y$ と書く．
- $X \prec Y \leftrightarrow X \preccurlyeq Y \wedge X \not\approx Y$.

Bernstein の定理を用いれば，$X \prec Y \leftrightarrow X \preccurlyeq Y \wedge Y \not\preccurlyeq X$ と書き直せる．

Definition 23

順序数 κ が基数 (cardinal number) であるとは，

$$\forall \xi < \kappa \, [\xi \prec \kappa]$$

であることである．

基数に関する補題

Lemma 24

1. 各自然数 $n \in \omega$ は基数である．
2. 集合 A の要素がすべて基数ならば，$\sup A \,(= \bigcup A)$ も基数である．
3. ω は基数である．

Proof

(1) は帰納法．(2) は背理法．(3) は (1)(2) から出る． $\square$

Hartogs 数

Lemma 25 (Hartogs)

任意の集合 A に対し，$\kappa \not\preceq A$ なる基数 κ が存在する．

Proof

略． $\square$

Lemma 25 の証明には選択公理は不要である．
この補題と Lemma 19 の注意から，次の定義は well-defined．

Definition 26

基数 κ に対し，κ より真に大きい基数のうち最小なものを κ^+ と書く．

$\aleph$ 函数

各順序数 α に対し，基数 $\aleph_\alpha$ を定める (超限再帰法).

Definition 27

- $\aleph_0 = \omega$.
- $\aleph_{\xi+1} = \aleph_\xi^+$.
- $\aleph_\eta = \bigcup_{\xi<\eta} \aleph_\xi$, for a limit ordinal η.

Lemma 28

$\aleph$ 函数は狭義単調増加である．つまり $\alpha < \beta \to \aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

Proof

帰納法. □

無限基数と $\aleph$ 函数

実は，あらゆる無限基数 (ω 以上の基数) は $\aleph_\alpha$ の形をしている．

Lemma 29

任意の無限基数 κ に対し，ある順序数 α が存在し，$\kappa = \aleph_\alpha$.

Proof

$\forall \xi \in ON\,[\xi \leq \aleph_\xi]$ がいえるので，$A = \{\zeta \in ON : \kappa \leq \aleph_\zeta\}$ は空でない (少くとも $\kappa \in A$ である)．実は，この A の最小元 $\alpha = \min A$ に対し，$\kappa = \aleph_\alpha$ がいえる． $\square$

ℵ 函数の不動点

先ほども述べたように，$\aleph_\xi \geq \xi$ であり，ほとんどの場合，等号は成立しない ($\aleph_0 \gg 0$ や $\aleph_1 \gg 1$ は当然すぎるだろう).
しかし，等号が成立する場合が無数にある！

Lemma 30

ある順序数 μ が存在し，$\aleph_\mu = \mu$.

Proof

超限再帰により，函数 δ を以下のように定める：
$\delta_0 = 0$, $\delta_{\xi+1} = \aleph_{\delta_\xi}$, $\delta_\eta = \bigcup_{\xi<\eta} \delta_\xi$ (η: lim).
このとき，η を極限順序数とすれば $\aleph_{\delta_\eta} = \delta_\eta$ となる．極限順序数は無数にあるから，このような不動点は無数にある． □

参考文献・読書案内

- [Kunen 2011] K.Kunen, *Set Theory*, Collage Publications, 2011.
- [Kunen 2009] K.Kunen, *The Foundations of Mathematics*, Collage Publications, 2009.
- [坪郷 1967] 坪郷勉,『複素数と 4 元数』，槇書店，1967.
- 田中一之・鈴木登志雄,『数学のロジックと集合論』，培風館，2003.
- 菊池誠,『不完全性定理』，共立出版，2014.
- 竹内外史,『集合とはなにか』(ブルーバックス)，講談社，2001.